# A propos des coordonnées polaires
## exemples introductifs

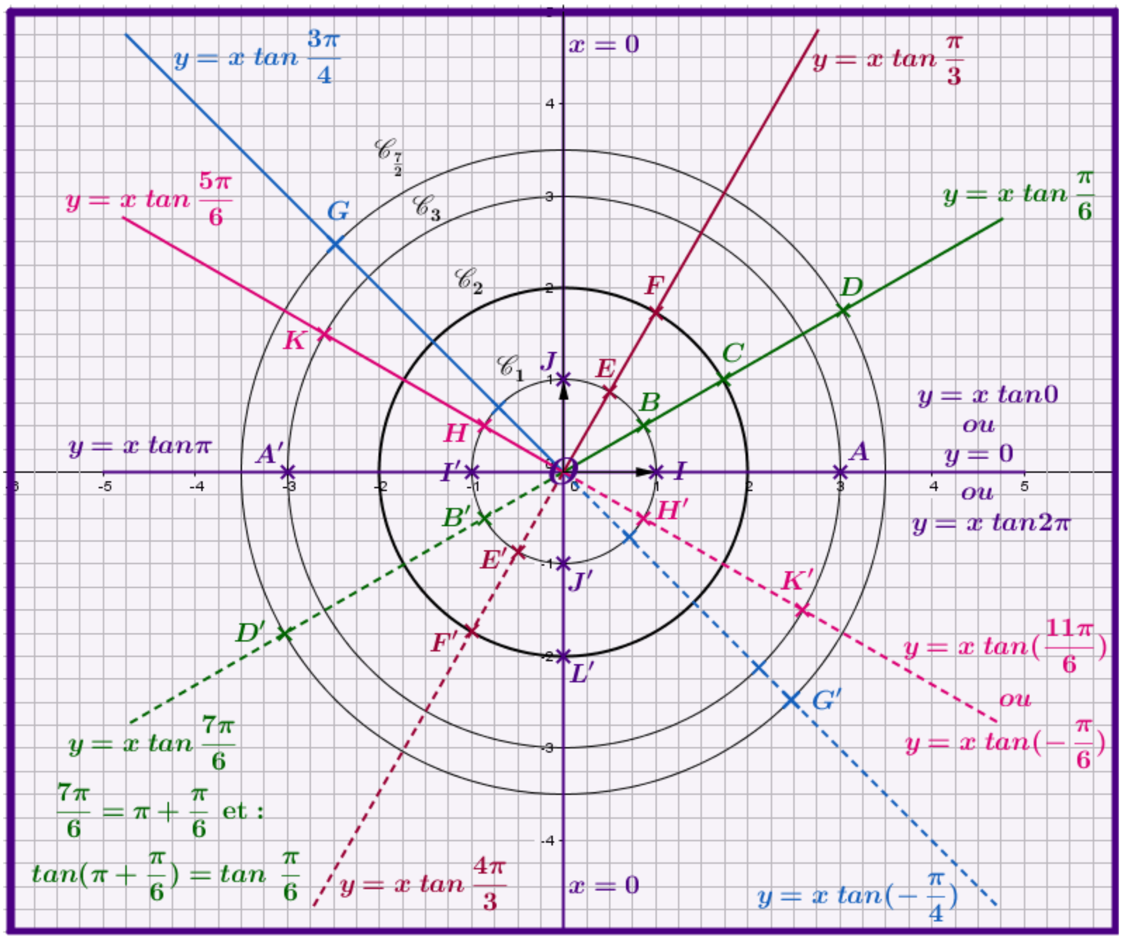


### On se place dans un plan orienté muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ orthonormal direct

Dans ce document , les vecteurs unitaires ( de norme 1 ) de la base du repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$ ) sont notés : $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$

**exemple 1** **repérer un point par deux nouvelles données numériques**

**figure 1** L'objet de ce premier exemple introductif est de repérer un point $M$ par deux données numériques autres que son abscisse et son ordonnée : les deux données numériques choisies sont sa distance à l'origine $O$ du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$ . La figure ci-dessous met en évidence 4 cercles concentriques centrés en $O$ et de rayons respectifs : 1 , 2 , 3 , $\frac{7}{2}$ .




**1)** Avec $M$ non situé sur l'axe des ordonnées , $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$ n'est pas un angle droit et sa mesure principale $\alpha$ étant distincte de $\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$ , la droite $(OM)$ possède un coefficient directeur égal à $\tan \alpha$ et une équation réduite du type : $y = x \tan \alpha$ .
Compléter la figure en écrivant l'équation réduite pour chacune des droites suivantes : $(OA)$ , $(OD)$ , $(OF)$ , $(OG)$ , $(OK)$ , $(OA')$ , $(OD')$ , $(OF')$ , $(OG')$ , $(OK')$ . Terminer la légende en écrivant l'équation réduite de l'axe $(Oy)$ .

**2)** On note pour tout point $M$ : $r_M = OM = d(O, M)$ et $\alpha_M$ une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$ ( $\alpha_M$ non unique ! )

**2-1** Compléter les quatre tableaux suivants :

| point $M$ | un couple $(r_M, \alpha_M)$ ? |
|---|---|
| $I$ | $I(1, 0)$ |
| $B$ | $B\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ |
| $E$ | $E\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ |
| $J$ | $J\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| $H$ | $H\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$ |

| $M$ | couple $(r_M, \alpha_M)$ ? |
|---|---|
| $I'$ | $I'(1, \pi)$ |
| $B'$ | $B'\left(1, \frac{7\pi}{6}\right)$ |
| $E'$ | $E'\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$ |
| $J'$ | $J'\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$ |
| $H'$ | $H'\left(1, \frac{11\pi}{6}\right)$ |

| $M$ | couple $(r_M, \alpha_M)$ ? |
|---|---|
| $D$ | $D\left(\frac{7}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ |
| $F$ | $F\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ |
| $G$ | $G\left(\frac{7}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ |
| $K$ | $K\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$ |
| $C$ | $C\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ |

| $M$ | couple $(r_M, \alpha_M)$ ? |
|---|---|
| $D'$ | $D'\left(\frac{7}{2}, -\frac{5\pi}{6}\right)$ |
| $F'$ | $F'\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ |
| $G'$ | $G'\left(\frac{7}{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ |
| $K'$ | $K'\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$ |
| $L'$ | $L'\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ |

**2-2** quatre couples du type $(r_D, \theta_D)$ pour $D$ : $D\left(\frac{7}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ , $D\left(\frac{7}{2}, \frac{13\pi}{6}\right)$ , $D\left(\frac{7}{2}, -\frac{11\pi}{6}\right)$ , $D\left(\frac{7}{2}, \frac{25\pi}{6}\right)$

**2-3** Que se passe-t-il pour un couple de type $(r_M, \theta_M)$ lorsque $M$ est en $O$ ? Avec $M = O$ : $r_M = OM$ devient $r_O = OO = 0$

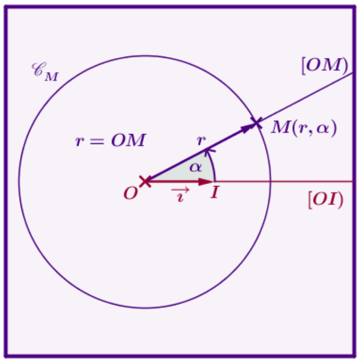
D'autre part : l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ n'est pas défini car $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur nul lorsque $M = O$ .

## vocabulaire : couples de coordonnées polaires

**1)** $M$ étant un point distinct de l'origine $O$ du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct , on appelle couple de coordonnées polaires du point $M$ tout couple $(r, \alpha)$ tel que :

$$r = OM \text{ et } (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \alpha\, [2\pi]$$

**2)** on décide : tout couple $(0, \alpha)$ avec $\alpha$ réel quelconque définit un couple de coordonnées polaires pour l'origine $O$ .




remarques pour un point $M$ distinct de $O$

→ Avec $M(r, \alpha)$ les autres couples de coordonnées polaires sont de la forme :

$M(r, \alpha + 2k\pi)$ $k$ étant élément de $\mathbb{Z}$

→ Contrairement aux deux coordonnées cartésiennes ( abscisse et ordonnée ) associées aux distances du point $M$ aux axes $(Ox)$ et $(Oy)$ du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les deux coordonnées polaires sont de nature différente :

• la première $(r)$ mesure une distance : celle de $M$ à l'origine $O$ ( point "central" appelé pôle ) ; intuitivement : cela revient à considérer que le point $M$ tourne autour du pôle $O$ en décrivant un cercle centré en $O$ .

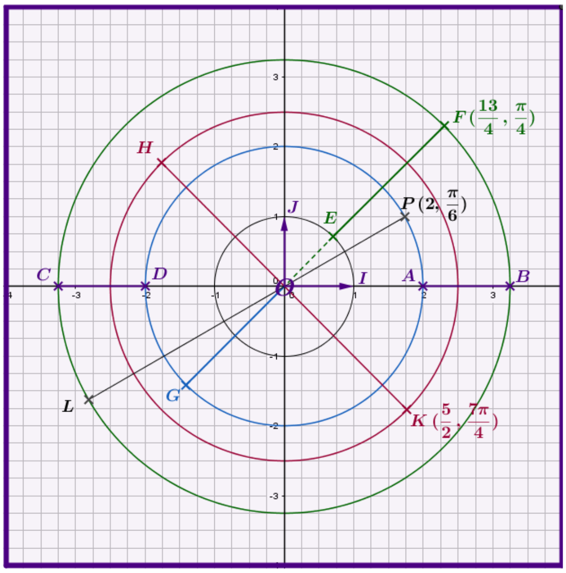
• la deuxième $(\alpha)$ mesure un angle : l'angle polaire $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ formé par la demi-droite (axe polaire) $[OI)$ ( $I$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{i}$ ) et la demi-droite $[OM)$ .

lettres usuelles pour noter → la distance $OM$ : $r$ ( comme rayon ) ; $\rho$ ( lettre grecque rho )

→ une mesure de l'angle polaire $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ : $t$ , $\alpha$ ( lettre grecque alpha ) ; $\theta$ ( lettre grecque thêta )

## exemple 2 définir un segment , une demi-droite , une droite avec des coordonnées polaires

Les segments , demi-droites , droites de la figure sont des parties de droites ou des droites contenant toutes le "pôle" $O$ . Pour chacun des ensembles suivants ( segment , demi-droite , droite ) : traduire sur le rayon $r$ et l'angle polaire $\theta$ l'appartenance d'un point $M(r, \theta)$ à cet ensemble . La phrase mathématique ainsi obtenue est appelée une équation polaire de l'ensemble étudié .




segments : $[AB] = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \in \left[2, \frac{13}{4}\right] \text{ et } \theta = 0 \right\}$

$[CD] = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \in \left[2, \frac{13}{4}\right] \text{ et } \theta = \pi \right\}$

$[EF] = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \in \left[1, \frac{13}{4}\right] \text{ et } \theta = \frac{\pi}{4} \right\}$

$[OG] = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \in [0, 2] \text{ et } \theta = -\frac{3\pi}{4} \right\}$

$[HK] = \left\{ M(r, \theta) \,/\, 0 \leq r \leq \frac{5}{2} \text{ et } \left(\theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4}\right) \right\}$

$[LP] = \left\{ M(r, \theta) \,/\, \left(r \in [0, 2] \text{ et } \theta = \frac{\pi}{6}\right) \text{ ou } \left(r \in \left[0, \frac{13}{4}\right] \text{ et } \theta = \frac{7\pi}{6}\right) \right\}$

demi-droites : $[AB)$ : $[AB) = \{M(r, \theta) \,/\, r \geq 2 \text{ et } \theta = 0\}$

$[OH) = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \theta = \frac{3\pi}{4} \right\} = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \theta \equiv \frac{3\pi}{4}\, [2\pi] \right\}$

$[OK) = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \theta = \frac{7\pi}{4} \right\}$

$[LP) = \left\{ M(r, \theta) \,/\, \left(r \in \left[0, \frac{13}{4}\right] \text{ et } \theta = \frac{7\pi}{6}\right) \text{ ou } \left(r \geq 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{6}\right) \right\}$

droites : $(HK) = [OH) \cup [OK) = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \left(\theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4}\right) \right\} = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \theta \equiv \frac{3\pi}{4}\, [\pi] \right\}$

$(LP) = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \theta \equiv \frac{\pi}{6}\, [\pi] \right\} = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \left(\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{6}\right) \right\}$

$(Ox) = \{M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \theta \equiv 0\, [\pi]\} = \{M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } (\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi)\}$

$(Oy) = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \theta \equiv \frac{\pi}{2}\, [\pi] \right\} = \left\{ M(r, \theta) \,/\, r \geq 0 \text{ et } \left(\theta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{2}\right) \right\}$

## exemple 3 — définir un cercle , un demi-cercle , un arc de cercle avec des coordonnées polaires



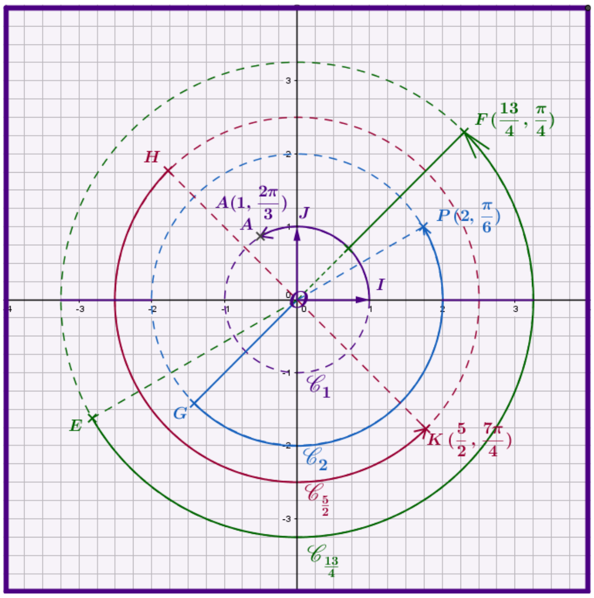
par exemple avec le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $O$ et de rayon 1 on peut écrire plusieurs équations polaires :

$\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta)\ /\ r = 1 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}\ \}$ ( la mesure $\theta$ est un réel quelconque ) ou bien : $\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta)\ /\ r = 1\ \}$ ( le plus simple ! )

ou bien avec $\theta$ appartenant à un intervalle fermé ou semi-ouvert dont l'amplitude $2\pi$ correspond à un tour complet de cercle :

$\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta)\ /r = 1 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]\ \}$ ou : $\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta)\ /r = 1 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\ \}$ ou : $\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta)\ /r = 1 \text{ et } \theta \in ]-\pi, \pi]\ \}$

**1)** En s'inspirant de ce qui précède , proposer deux définitions par une équation polaire pour chacun des ensembles suivants :




cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $O$ et de rayon 2 : $\mathcal{C}_2 = \{M(r,\theta)\ /\ r = 2\}$

$\mathcal{C}_2 = \{M(r,\theta)\ /\ r = 2 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]\}$

cercle $\mathcal{C}_{\frac{5}{2}}$ de centre $O$ et de rayon $\frac{5}{2}$ : $\mathcal{C}_{\frac{5}{2}} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = \frac{5}{2}\right\}$

$\mathcal{C}_{\frac{5}{2}} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = \frac{5}{2} \text{ et } \theta \in [-2\pi, 0]\right\}$

cercle $\mathcal{C}_{\frac{13}{4}}$ de centre $O$ et de rayon $\frac{13}{4}$: $\mathcal{C}_{\frac{13}{4}} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = \frac{13}{4}\right\}$

$\mathcal{C}_{\frac{13}{4}} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = \frac{13}{4} \text{ et } \theta \in [\pi, 3\pi[\right\}$

**2)** Compléter ce qui suit par lecture graphique ( sans justifier )

| le point $M$ | $I$ | $A$ | $G$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|
| $M\ (r_M, \alpha_M)$ | $I\,(1, 0)$ | $A\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ | $G\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$ | $P\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ |

| $K$ | $H$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $K\left(\frac{5}{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ | $H\left(\frac{5}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ | $E\left(\frac{13}{4}, \frac{7\pi}{6}\right)$ | $F\left(\frac{13}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ |

Attention : les bornes $a$ et $b$ de l'intervalle $[a, b]$ utilisé pour la mesure $\theta$ dans une définition d'arc orienté avec une équation polaire doivent impérativement respecter $a < b$ et donc : bien choisir ses mesures !

**l'arc orienté $\overset{\frown}{IA}$** : $\overset{\frown}{IA} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = 1 \text{ et } \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]\right\}$

**l'arc orienté $\overset{\frown}{GP}$** : $\overset{\frown}{GP} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = 2 \text{ et } \theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]\right\}$ ou $\overset{\frown}{GP} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = 2 \text{ et } \theta \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{6}\right]\right\}$

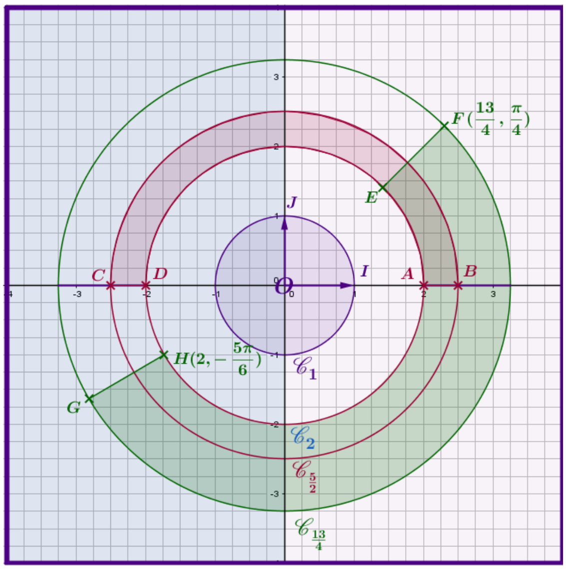
**l'arc orienté $\overset{\frown}{HK}$** : $\overset{\frown}{HK} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = \frac{5}{2} \text{ et } \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]\right\}$ ou $\overset{\frown}{HK} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = \frac{5}{2} \text{ et } \theta \in \left[-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]\right\}$

**l'arc orienté $\overset{\frown}{EF}$** : $\overset{\frown}{EF} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = \frac{13}{4} \text{ et } \theta \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}$ ou $\overset{\frown}{EF} = \left\{M(r,\theta)\ /\ r = \frac{13}{4} \text{ et } \theta \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}\right]\right\}$

## exemple 4 — définir une région du plan avec des coordonnées polaires

Vocabulaire : toute région contenant ses frontières est dite fermée ; toute région ne contenant pas ses frontières est dite ouverte

Définir chacune des régions du plan suivantes avec une équation polaire




**le disque fermé de centre $O$ et de rayon 1** :

$\{M(r,\theta)\ /\ 0 \le r \le 1\ \}$

**le disque ouvert de centre $O$ et de rayon 1** :

$\{M(r,\theta)\ /\ 0 \le r < 1\ \}$

**la demi-couronne fermée** :

$\left\{M(r,\theta)\ /\ 2 \le r \le \frac{5}{2} \text{ et } \theta \in [0, \pi]\right\}$

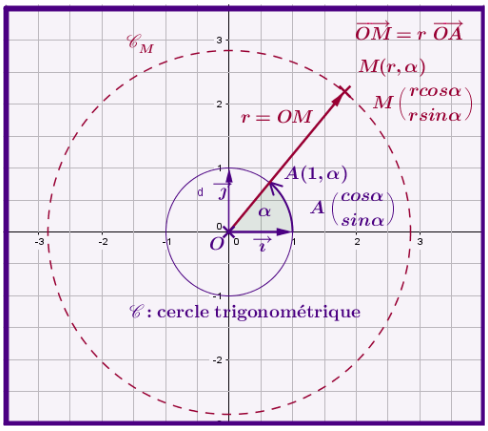
**le demi-plan fermé situé à gauche de l'axe $(Oy)$** :

$\left\{M(r,\theta)\ /\ r \ge 0 \text{ et } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right\}$

**la région ouverte de frontières $[HG], [EF], \overset{\frown}{GF}, \overset{\frown}{HE}$** :

$\left\{M(r,\theta)\ /\ 2 < r < \frac{13}{4} \text{ et } \theta \in \left]-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\right\}$

**situation 1** : $\begin{cases}\text{on connaît un couple de coordonnées polaires pour } M\\ \text{on demande de calculer ses coordonnées cartésiennes}\end{cases}$




**méthode** : avec $M(r,\alpha)$ , on calcule les coordonnées cartésiennes de $M$ en utilisant : $x_M = r\cos\alpha$ et $y_M = r\sin\alpha$

un exemple : Avec $A\left(6, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ on obtient : $A\begin{pmatrix}-3\\ 3\sqrt{3}\end{pmatrix}$ . En effet :

$x_A = r_A\cos\alpha = 6\cos\dfrac{2\pi}{3} = 6\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = 6\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}\right) = 6\times -\dfrac{1}{2} = -3$

$y_A = r_A\sin\alpha = 6\sin\dfrac{2\pi}{3} = 6\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = 6\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

exercice : Calculer les coordonnées cartésiennes de $B(\sqrt{2}, -\dfrac{5\pi}{4})$

Avec $B(\sqrt{2}, -\dfrac{5\pi}{4})$ on construit : $B\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ . En effet :

$x_B = r_B\cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\times\left(-\cos\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\times -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -1$

$y_B = r_B\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\sin\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\times\left(-\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\times -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

**situation 2** : $\begin{cases}\text{on connaît les coordonnées cartésiennes du point } M\\ \text{on demande un couple de coordonnées polaires pour } M\end{cases}$

**méthode** : on construit un couple de coordonnées polaires pour $M\begin{pmatrix}x_M\\ y_M\end{pmatrix}$ en suivant la démarche suivante :

d'abord 1) on calcule $r$ avec : $r > 0$ et $r^2 = OM^2 = x_M^2 + y_M^2$

puis 2) • on commence par calculer les valeurs de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ avec : $\cos\alpha = \dfrac{x_M}{r}$ et $\sin\alpha = \dfrac{y_M}{r}$

• ensuite on détermine une mesure $\alpha$ en utilisant les lignes trigonométriques à connaître ( pour $0, \pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \ldots$ ) et les valeurs numériques trouvées pour $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ pour créer deux égalités du type : $\cos\alpha = \cos\theta$ et $\sin\alpha = \sin\theta$ avec $\theta$ associé à une mesure connue . On obtient alors : $\alpha \equiv \theta\,[2\pi]$ . Conclusion : $M(r,\theta)$ !

un exemple : avec $C\begin{pmatrix}-6\\ -2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ , un de ses couples de coordonnées polaires est : $C\left(4\sqrt{3}, \dfrac{7\pi}{6}\right)$ . En effet :

1) $r_C^2 = OC^2 = x_C^2 + y_C^2 = (-6)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 36 + 12 = 48 = 3\times 16 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$ ; $r_C > 0$ et $r_C^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$ donc : $r_C = 4\sqrt{3}$

2) Avec $\alpha$ mesure de $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OC}\right)$ on a : $x_C = r_C\cos\alpha = 4\sqrt{3}\cos\alpha$ et $y_C = r_C\sin\alpha = 4\sqrt{3}\sin\alpha$ . D'où :

$\cos\alpha = \dfrac{x_C}{4\sqrt{3}} = \dfrac{-6}{4\sqrt{3}} = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{7\pi}{6}$

$\sin\alpha = \dfrac{y_C}{4\sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{7\pi}{6}$

Ayant $\cos\alpha = \cos\dfrac{7\pi}{6}$ et $\sin\alpha = \sin\dfrac{7\pi}{6}$ on déduit : $\alpha \equiv \dfrac{7\pi}{6}\,[2\pi]$ .

exercice : déterminer un couple de coordonnées polaires pour le point $D\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}$

1) $r_D^2 = OD^2 = x_D^2 + y_D^2 = (1-\sqrt{2})^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2$ car $1-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}-1$ opposés et de même carré

$r_D^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)^2$ . $r_D > 0$ et $2-\sqrt{2} > 0$ donc : $r_D = 2-\sqrt{2}$

2) Avec $\alpha$ mesure de $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OD}\right)$ on a : $x_D = r_D\cos\alpha = \left(2-\sqrt{2}\right)\cos\alpha$ et $y_D = r_D\sin\alpha = \left(2-\sqrt{2}\right)\sin\alpha$ . D'où :

$\cos\alpha = \dfrac{x_D}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\dfrac{\pi}{4}$

$\sin\alpha = \dfrac{y_D}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

On doit maintenant trouver un réel $\alpha$ associé à $\dfrac{\pi}{4}$ tels que $\alpha$ et $\dfrac{\pi}{4}$ ont le même sinus et des cosinus opposés ( angles associés !)

$\cos\alpha = -\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$\sin\alpha = \sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{3\pi}{4}$

Ayant $\cos\alpha = \cos\dfrac{3\pi}{4}$ et $\sin\alpha = \sin\dfrac{3\pi}{4}$ on déduit : $\alpha \equiv \dfrac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ .

Un couple de coordonnées polaires pour le point $D$ est donc : $D\left(2-\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$