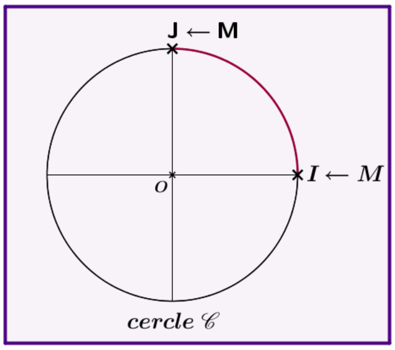
Travailler dans un plan orienté

Le plan orienté

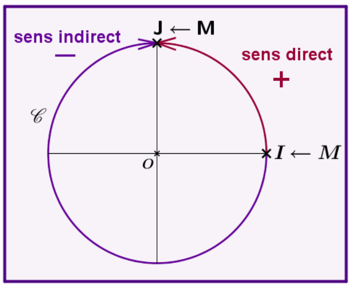


Comme l'indique la figure , un point M mobile et décrivant un cercle $\mathcal{C}$ peut utiliser deux sens de parcours pour aller de I vers J ; l'un de ces deux sens de parcours utilise un quart de tour du cercle $\mathcal{C}$ et l'autre sens utilise trois quarts de tour de $\mathcal{C}$. D'où :

définition 1 **orienter le cercle $\mathcal{C}$** c'est décider de privilégier un de ces deux sens de parcours en le qualifiant de sens direct (ou bien de sens trigonométrique ou bien de sens positif) , l'autre sens de parcours étant alors appelé sens indirect (ou bien sens négatif ou bien sens rétrograde)

définition 2 **orienter un plan** c'est décider d'orienter tous les cercles de ce plan de la même façon

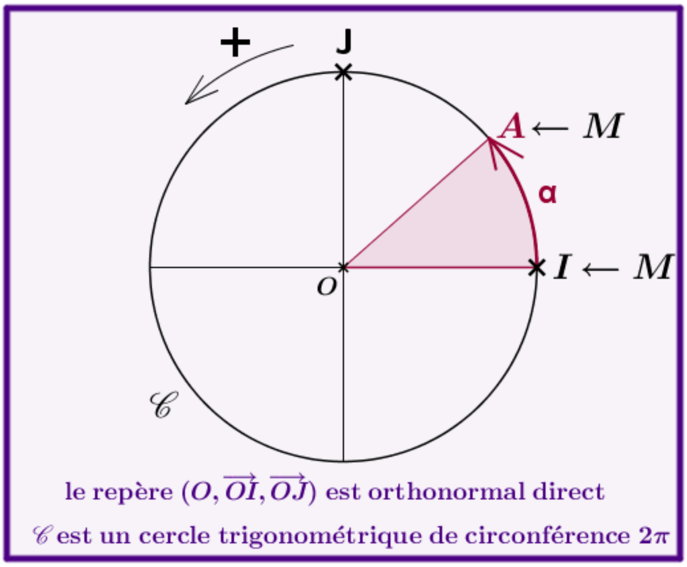
La figure ci-contre indique l'orientation du plan choisie par convention



définition 3 Tout cercle de rayon 1 et orienté comme précédemment est appelé **un cercle trigonométrique**

Mesurer des arcs sur un cercle trigonométrique

- se donner un arc orienté sur un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ revient à se donner deux points sur ce cercle , l'un servant d'origine et l'autre d'extrémité . La figure met en évidence l'arc orienté $\overset{\frown}{IA}$ d'origine I et d'extrémité A associé à l'arc du cerle $\mathcal{C}$ intercepté par l'angle au centre $\widehat{IOA}$.
L'arc orienté $\overset{\frown}{AI}$ est appelé l'arc opposé de l'arc $\overset{\frown}{IA}$



- une infinité de mesures pour l'arc orienté $\overset{\frown}{IA}$

On utilise un point M < mobile > sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Partant de I , il arrive en A après avoir effectué en sens direct et en moins d'un tour de cercle un trajet de longueur α (selon la position de A sur le cercle on a : $0 \leq \alpha < 2\pi$) . Le point M peut continuer à décrire le cercle $\mathcal{C}$ en sens direct ou indirect et être ainsi amené à repasser sur la position donnée par le point A . Chacun de ces passages en A correspond à un trajet effectué par le point M depuis < son départ en I > , trajet de longueur β qui peut être mesuré comme l'indique ce qui suit :

< longueur β > du trajet de M depuis le départ en I en ayant effectué n tours en sens direct après son 1^{er} passage en A : $\beta = \alpha + ?$	les tours de cercle effectués en sens direct sont comptés < positivement >				
	1 tour	2 tours	3 tours	....	n tours
	$\alpha + 2\pi$	$\alpha + \mathbf{2} \times 2\pi$ ou $\alpha + 4\pi$	$\alpha + \mathbf{3} \times 2\pi$ ou $\alpha + 6\pi$		$\alpha + n(2\pi)$ avec n *entier* naturel
< longueur β > du trajet de M depuis le départ en I en ayant effectué n tours en sens indirect après son 1^{er} passage en A : $\beta = \alpha - ?$	les tours de cercle effectués en sens indirect sont comptés < négativement >				
	1 tour	2 tours	3 tours	....	n tours
	$\alpha - 2\pi$	$\alpha - \mathbf{2} \times 2\pi$ ou $\alpha - 4\pi$	$\alpha - \mathbf{3} \times 2\pi$ ou $\alpha - 6\pi$		$\alpha - n(2\pi)$ avec n *entier* naturel

Ces réels β sont appelés les mesures en radians de l'arc orienté $\overset{\frown}{IA}$. Ces réels β peuvent s'écrire : $\alpha + k \times 2\pi$ avec $k = n$ ou $k = -n$ et n entier naturel . Autrement dit : $\beta = \alpha + 2k\pi$ **avec k entier relatif** .

deux rappels de notations : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels . $\mathbb{Z}$ désigne de l'ensemble des entiers relatifs

remarques : 1) **le mot radian vient du latin < radius > signifiant rayon** ; un arc orienté de $\mathcal{C}$ ayant pour mesure un radian est donc associé à un trajet dont la longueur correspond au rayon de ce cercle .

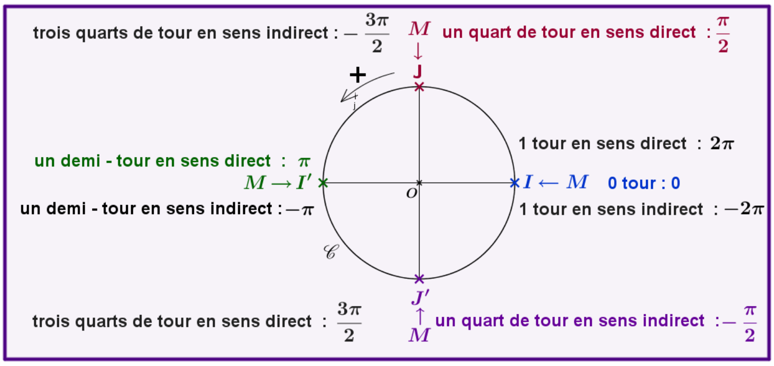
2) deux mesures quelconques de l'arc orienté $\overset{\frown}{IA}$ ont une différence égale à $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3) Pour chaque arc orienté $\overset{\frown}{IA}$, il existe , selon la position de A par rapport à (OI) , un trajet < minimum > utilisant au plus un demi-tour en sens direct ou bien en sens indirect . **La mesure α associée à ce trajet le plus court est appelée la mesure principale de l'arc orienté $\overset{\frown}{IA}$** (pour un trajet d'un demi tour on privilégie le sens direct) .

- des mesures d'arcs particuliers à connaître

utile dans $\mathbb{N}$: $\rightarrow$ écriture d'un nombre pair : $2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ écriture d'un nombre impair : $2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

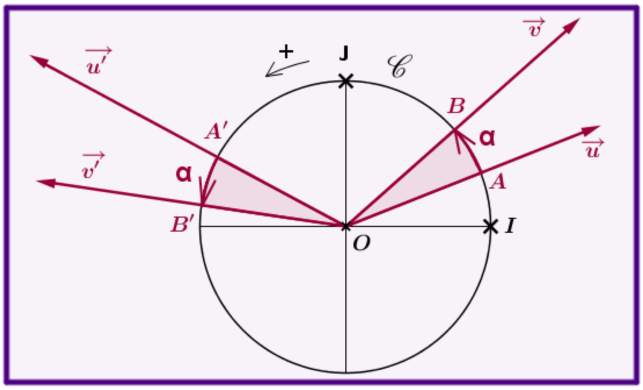
l'arc	**sa mesure principale**	autres mesures pour cet arc orienté ($k \in \mathbb{Z}$)
$\overset{\frown}{IJ}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\overset{\frown}{II'}$	π	$-\pi, 3\pi, -3\pi, 5\pi, \ldots, (2k+1)\pi$
$\overset{\frown}{IJ'}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\overset{\frown}{II}$	0	$2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \ldots, 2k\pi$



angle orienté d'un couple de deux vecteurs non nuls

notations utilisées : • $\mathcal{C}$: cercle trigonométrique de centre O

- A , B , A' , B' : quatre points du cercle $\mathcal{C}$
- $\vec{u}$: vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{OA}$, de même sens que $\overrightarrow{OA}$
- $\vec{v}$: vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{OB}$, de même sens que $\overrightarrow{OB}$
- $\vec{u'}$: vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{OA'}$, de même sens que $\overrightarrow{OA'}$
- $\vec{v'}$: vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{OB'}$, de même sens que $\overrightarrow{OB'}$

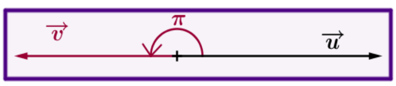
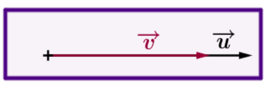


définition 1 Lorsque les arcs orientés $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$ ont une même mesure α , on dit que les couples $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u'}, \vec{v'})$ définissent le même **angle orienté d'un couple de deux vecteurs non nuls** qui est noté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou $(\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}})$

définition 2 Les mesures en radian de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ sont les mesures en radian de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ toute mesure de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est notée $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$ (notation lue $\vec{u}, \vec{v}$ barre)

définition 3 L'angle orienté $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ est appelé l'angle opposé de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

- angles orientés avec des vecteurs colinéaires non nuls

lien entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$	un dessin de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine sur la figure	son nom , sa mesure principale	écrire une mesure quelconque de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraires		angle plat π	$\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens		angle nul 0	$\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = 0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

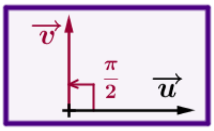
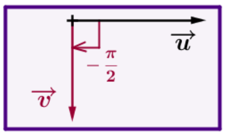
remarque : traduire sur les angles la colinéarité de deux vecteurs non nuls

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires signifie : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle nul ou l'angle plat

donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires signifie : $\exists K \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = 2K\pi$ ou $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = (2K+1)\pi$

Ainsi : $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires signifie : } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ , } \overline{(\vec{u},\vec{v})} = k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}$: $k = 2K($ k pair $)$ ou $k = 2K+1$ (k impair)

- angles orientés avec des vecteurs orthogonaux non nuls

lien entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$	un dessin de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	son nom , sa mesure principale	mesure quelconque de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
$\vec{v}$ directement orthogonal à $\vec{u}$		angle droit direct $\frac{\pi}{2}$	$\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\vec{v}$ indirectement orthogonal à $\vec{u}$		angle droit indirect $-\frac{\pi}{2}$	$\overline{(\vec{u},\vec{v})} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

remarque : traduire sur les angles l'orthogonalité de deux vecteurs non nuls

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux signifie : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un angle droit direct ou un angle droit indirect

donc : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ ou $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{2} + (2K+1)\pi$

Ainsi : $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ , } \overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

- une notation commode pour les mesures des angles

La phrase mathématique < $\exists k \in \mathbb{Z}, \overline{(\vec{u},\vec{v})} = \alpha + 2k\pi$ > traduit : α est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

La phrase mathématique < $\exists k \in \mathbb{Z}, \overline{(\vec{u},\vec{v})} = \alpha + 2k\pi$ > peut être remplaçée par la phrase mathématique **:** $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \alpha\,[2\pi]$ **.**

la phrase mathématique : $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \alpha[2\pi]$ **est lue** $\overline{(\vec{u},\vec{v})}$ **est congru à** α **modulo** 2π

Et pour transformer l'égalité $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \alpha\,[2\pi]$ dite égalité de congruence en une infinité d'égalités dans $\mathbb{R}$ qui sont toutes de la même forme suivante : $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \alpha + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) on utilise l'équivalence :

$$\boxed{\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \alpha\,[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \overline{(\vec{u},\vec{v})} = \alpha + 2k\pi}$$

cas général avec α , β et x réels : $\boxed{x \equiv \alpha\,[\beta] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \alpha + k(\beta)}$; $x \equiv \alpha\,[\beta]$ est lu x est congru à α modulo β

exemple 1 traduire en termes de mesures et **avec une égalité de congruence**

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un **angle nul** : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \overline{(\vec{u},\vec{v})} = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv 0[2\pi]$

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un **angle plat** : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = (2k+1)\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \overline{(\vec{u},\vec{v})} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \pi[2\pi]$

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un **angle droit direct** : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un **angle droit indirect** : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **colinéaires** signifie : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \overline{(\vec{u},\vec{v})} = 0 + k\pi \Leftrightarrow \overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv 0[\pi]$

$\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **orthogonaux** : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

exemple 2 le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et $\mathcal{C}$ est un cercle trigonométrique centré en O

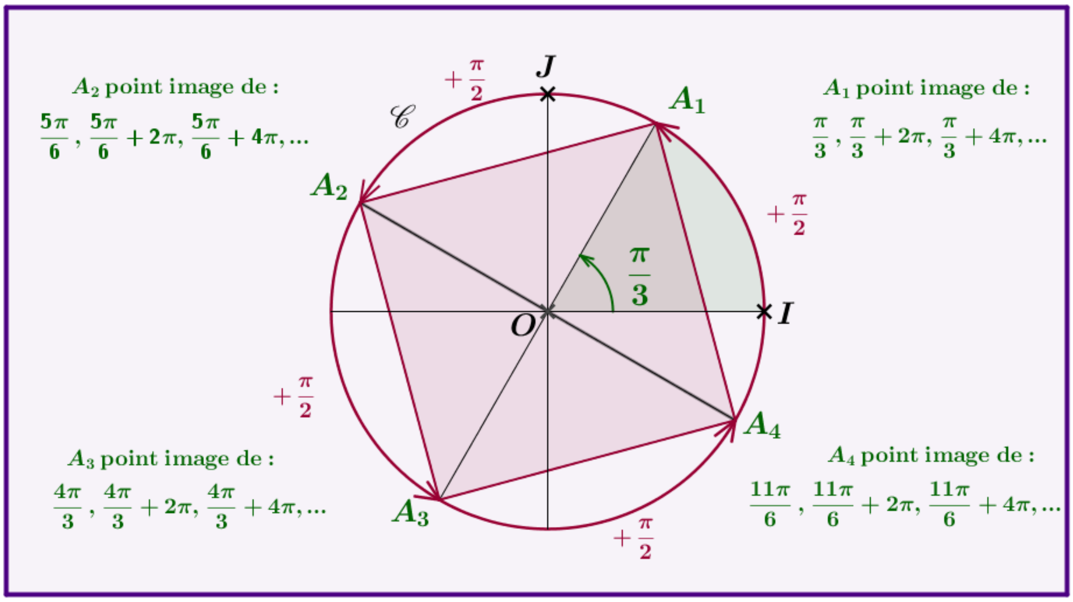
Tout point M du cercle $\mathcal{C}$ tel que l'arc $\overset{\frown}{IM}$ (ou l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$) soit de mesure x est appelé un point image du réel x sur le cercle $\mathcal{C}$.

Le but de cet exemple est de représenter sur $\mathcal{C}$ les points images des réels x congrus à $\frac{\pi}{3}$ modulo $\frac{\pi}{2}$.

On a : $x \equiv \frac{\pi}{3}\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'où les deux tableaux suivants puis la figure représentant sur le cercle $\mathcal{C}$ les points images des réels x congrus à $\frac{\pi}{3}$ modulo $\frac{\pi}{2}$.

entier k	0	1	2	3	4
$x = \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} + 1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$	$\frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi$	$\frac{\pi}{3} + 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11}{6}\pi$	$\frac{\pi}{3} + 4\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi$
point image sur $\mathcal{C}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_1

entier k	5	6
$x=\dfrac{\pi}{3}+k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{3}+5\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}+1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+4\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{6}\pi+2\pi$	$\dfrac{\pi}{3}+6\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}+3\pi=\dfrac{\pi}{3}+\pi+2\pi=\dfrac{4\pi}{3}+3\pi$
point image sur $\mathcal{C}$	A_2	A_3



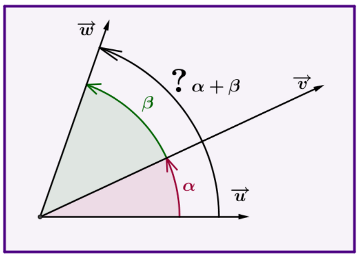
Le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ associé aux quatre points images des réels congrus à $\dfrac{\pi}{3}$ modulo $\dfrac{\pi}{2}$ est un carré .

Pour passer , en sens direct , d'un sommet de ce carré au suivant on effectue un quart de tour de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
$4\times\dfrac{\pi}{2}=2\pi$ traduit : quatre quarts de tour consécutifs donnent un tour complet !

- relations de Chasles concernant les angles orientés

Avec une somme de deux mesures

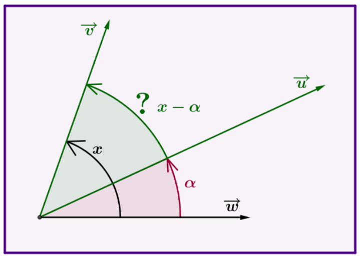
Avec α mesure de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
et β mesure de $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$
on a :
$\alpha+\beta$ mesure de $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$



Autrement dit : $\overline{(\vec{u},\vec{w})}\equiv\left(\overline{(\vec{u},\vec{v})}+\overline{(\vec{v},\vec{w})}\right)\ [2\pi]$

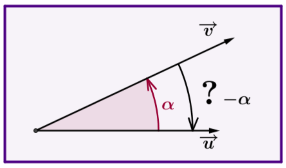
Avec une différence de deux mesures

Avec x mesure de $(\widehat{\vec{w},\vec{v}})$
et α mesure de $(\widehat{\vec{w},\vec{u}})$
on a :
$x-\alpha$ mesure de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$



Autrement dit : $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\left(\overline{(\vec{w},\vec{v})}-\overline{(\vec{w},\vec{u})}\right)\ [2\pi]$

- mesures des angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$

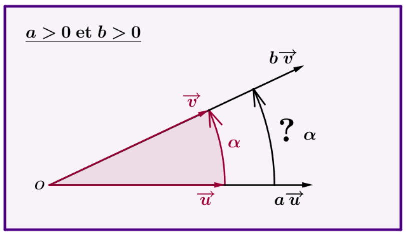


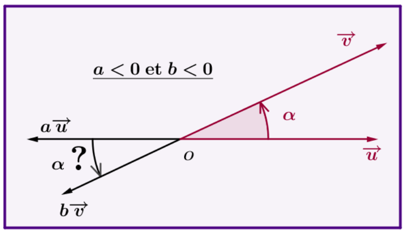
Avec α mesure de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ on a : $-\alpha$ mesure de $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$
Autrement dit : $\overline{(\vec{v},\vec{u})}\equiv-\overline{(\vec{u},\vec{v})}\ \ [2\pi]$

- mesures des angles orientés $(\widehat{a\vec{u},b\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ (avec a et b réels non nuls)

$a\vec{u}$ et $b\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls colinéaires respectivement à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (représentés à la même origine sur les figures)

$\rightarrow$ **a et b de même signe :** $(\widehat{a\vec{u},b\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de même mesure

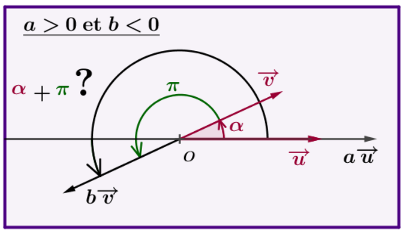


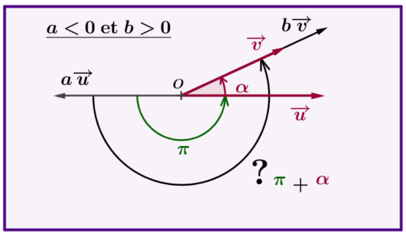


Théorème

$$\begin{cases}\overline{(a\vec{u},b\vec{v})}\equiv\overline{(\vec{u},\vec{v})}[2\pi] & \Longleftrightarrow\ ab>0\\ \overline{(a\vec{u},b\vec{v})}\equiv\left(\pi+\overline{(\vec{u},\vec{v})}\right)[2\pi] & \Longleftrightarrow\ ab<0\end{cases}$$

$\rightarrow$ **a et b de signes contraires :** $\begin{cases}\text{avec } \alpha \text{ mesure de } (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \text{ on a :}\\ \pi+\alpha \text{ mesure de } (\widehat{a\vec{u},b\vec{v}})\end{cases}$





exemple : avec $(\vec{i},\vec{j})$ droit direct on a :

$\overline{(\vec{i},\vec{j})}\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\overline{(-\vec{i},-\vec{j})}\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\overline{(\vec{i},-\vec{j})}\equiv\dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]\ \left(\pi+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\overline{(2\vec{i},-3\vec{j})}\equiv\dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

$\overline{(4\vec{i},\vec{j})}\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\overline{(-3\vec{i},-7\vec{j})}\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\overline{(-8\vec{i},\frac{5}{2}\vec{j})}\equiv\dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

trois configurations à connaître sur un cercle trigo

On se place dans un plan orienté muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ orthonormal direct

• En préalable : une équation pour le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ centré en O

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point du plan

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow OM^2 = 1^2$ (car OM positif) et $M \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow OM^2 = 1$

Avec H projeté orthogonal de M sur (OI) , le triangle OHM est rectangle en H .

Le théorème de Pythagore est applicable et permet d'obtenir : $OM^2 = OH^2 + HM^2$

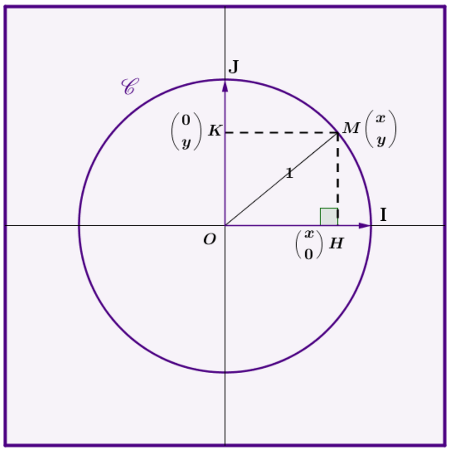
D'autre part : $\text{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entraîne $\text{H}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OI}$ donc : $OH = |x|\, OI$ puis $OH^2 = x^2 \times OI^2$ soit $OH^2 = x^2$ ($OI = 1$)

Et : $\overrightarrow{HM} = y\overrightarrow{OJ}$ qui entraîne : $HM^2 = y^2 \times OJ^2$ soit $HM^2 = y^2$ ($OJ = 1$)

Ainsi : $OM^2 = OH^2 + HM^2$ devient : $OM^2 = x^2 + y^2$

et $M \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow OM^2 = 1$ devient : $M \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

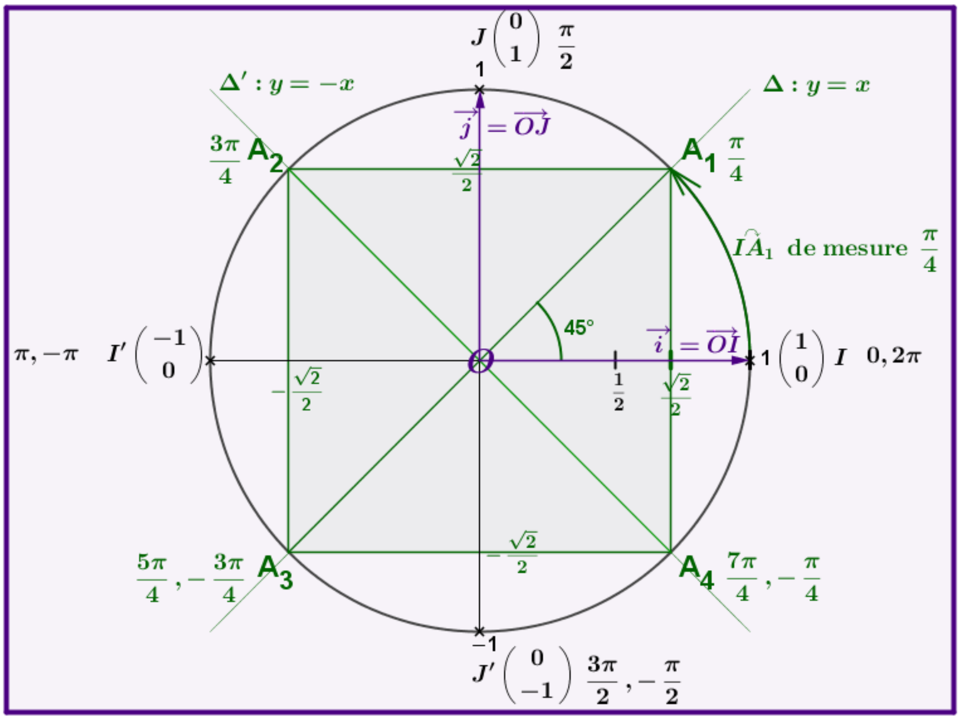


Une équation cartésienne du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est : $x^2 + y^2 = 1$

• première configuration : le carré $A_1A_2A_3A_4$ associé à la mesure $\dfrac{\pi}{4}$

Les huit points $I, A_1, J, A_2, I', A_3, J', A_4$ mettent en évidence un partage du cercle trigonométrique en huit arcs de cercle de même mesure α . Le trajet associé à la mesure α correspond donc à $\dfrac{1}{8}$ de tour de cercle et : $\alpha = \dfrac{1}{8} \times 2\pi = \dfrac{\pi}{4}$.

l'arc	des mesures de l'arc
$\overset{\frown}{IA_1}$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\overset{\frown}{IA_2}$	$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{4}$
$\overset{\frown}{IA_3}$	$\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{4}$
$\overset{\frown}{IA_4}$	$\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{4}$



valeur de l'abscisse x de A_1

$A_1\begin{pmatrix} x \\ y = x \end{pmatrix}$ avec $x > 0$

A_1 est situé sur le cercle $\mathcal{C}$ dont une équation est : $x^2 + y^2 = 1$.

Donc : $A_1 \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow (x_{A_1})^2 + (y_{A_1})^2 = 1$

soit : $A_1 \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow x > 0$ et $x^2 + x^2 = 1$

D'où : $A_1 \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow x > 0$ et $2x^2 = 1$

soit : $A_1 \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow x > 0$ et $x^2 = \dfrac{1}{2}$

et : $A_1 \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow x > 0$ et $x^2 = \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2$

D'autre part : $\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x^2 = \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $A_1 \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow x > 0$ et $\left(x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. A_1 a donc une abscisse et une ordonnée égales à : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

A savoir → le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est un carré et les coordonnées de ses quatre sommets sont :

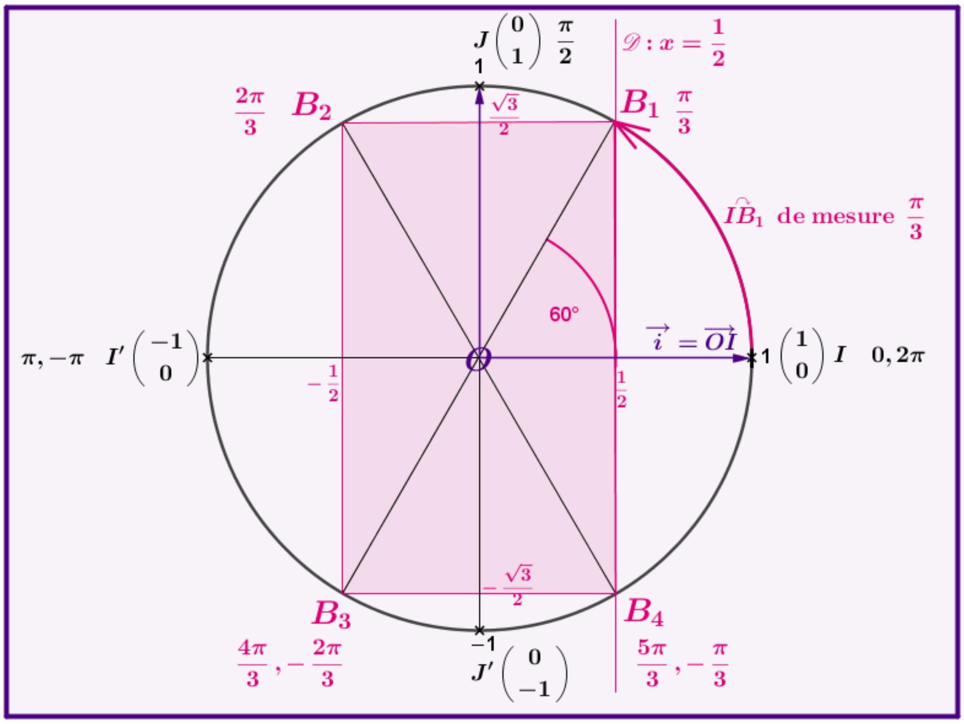
$$A_1\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad A_2\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad A_3\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad A_4\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

→ l'angle plat $\widehat{IOI'}$ mesurant π radians et 180 degrés , une mesure de l'angle au centre $\widehat{IOA_1}$ est $\begin{cases} \text{en radian : } \dfrac{\pi}{4} \\ \text{en degrés : } \dfrac{180}{4} \text{ soit : } 45^o \end{cases}$

• deuxième configuration : le rectangle $B_1B_2B_3B_4$ associé à la mesure $\dfrac{\pi}{3}$

Les points $I, B_1, B_2, I', B_3, B_4$ mettent en évidence un partage du cercle trigonométrique en six arcs de cercle de même mesure β . Le trajet associé à la mesure β correspond donc à $\dfrac{1}{6}$ de tour de cercle et : $\beta = \dfrac{1}{6} \times 2\pi = \dfrac{\pi}{3}$

l'arc	des mesures de l'arc
$\overset{\frown}{IB_1}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\overset{\frown}{IB_2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$
$\overset{\frown}{IB_3}$	$\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{2\pi}{3}$
$\overset{\frown}{IB_4}$	$\dfrac{2\pi}{3} + \pi = \dfrac{5\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}$



valeur de l'ordonnée y de B_1

$B_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ y\end{pmatrix}$ $(y > 0)$

$B_1 \in \mathcal{C} \;\Leftrightarrow (x_{B_1})^2 + (y_{B_1})^2 = 1$

Et : $B_1 \in \mathcal{C} \;\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + (y)^2 = 1$ et $y > 0 \Leftrightarrow (y)^2 = 1 - \dfrac{1}{4}$ et $y > 0 \Leftrightarrow (y)^2 = \dfrac{3}{4}$ et $y > 0 \Leftrightarrow y^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et $y > 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

A savoir

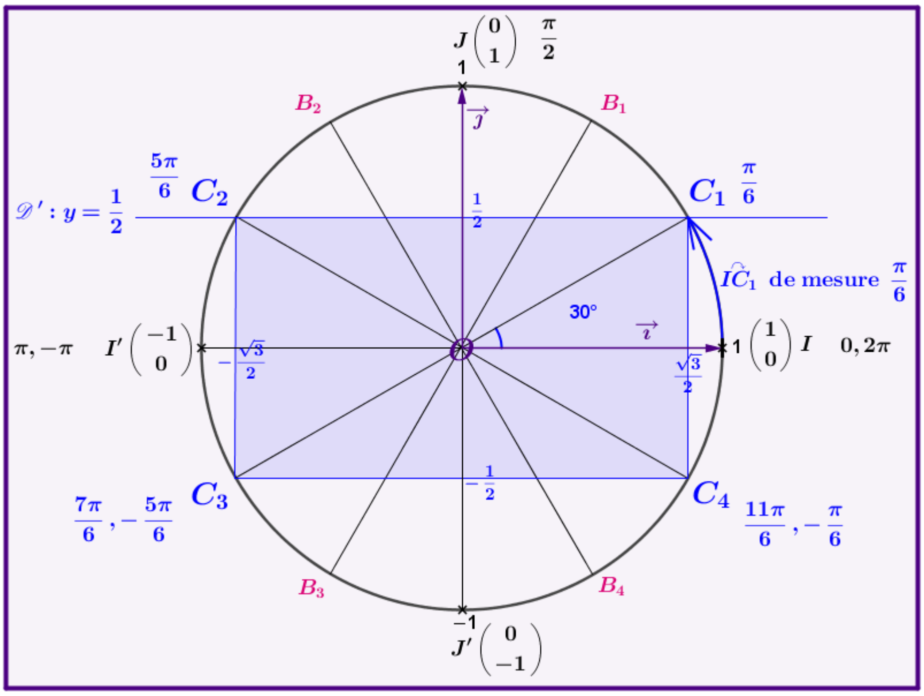
$\rightarrow$ le quadrilatère $B_1B_2B_3B_4$ est un rectangle et les coordonnées de ses quatre sommets sont :

$B_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}, B_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}, B_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}, B_4\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ une mesure de l'angle au centre $\widehat{IOB_1}$ est

$\begin{cases} \text{en radian : } \dfrac{\pi}{3} \\ \text{en degrés : } \dfrac{180}{3} \text{ soit : } 60^o \end{cases}$

• troisième configuration : le rectangle $C_1C_2C_3C_4$ associé à la mesure $\dfrac{\pi}{6}$



Un partage du cercle trigonométrique en douze arcs de cercle de même mesure γ est mis en évidence par : $I, C_1, B_1, J, B_2, C_2, I', C_3, B_3, J', B_4, C_4$.

Le trajet associé à la mesure γ correspond donc à $\dfrac{1}{12}$ de tour de cercle et : $\gamma = \dfrac{1}{12} \times 2\pi = \dfrac{\pi}{6}$

l'arc	des mesures
$\overset{\frown}{IC_1}$	$\dfrac{\pi}{6}$
$\overset{\frown}{IC_2}$	$\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}, -2\pi + \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{7\pi}{6}$
$\overset{\frown}{IC_3}$	$\pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}, -2\pi + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}$
$\overset{\frown}{IC_4}$	$-\dfrac{\pi}{6}, 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$

A savoir

$\rightarrow$ le quadrilatère $C_1C_2C_3C_4$ est un rectangle et les coordonnées de ses quatre sommets sont :

$C_1\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, C_2\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, C_3\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}, C_4\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ une mesure de l'angle au centre $\widehat{IOC_1}$ est

$\begin{cases} \text{en radian : } \dfrac{\pi}{6} \\ \text{en degrés : } \dfrac{180}{6} \text{ soit : } 30^o \end{cases}$