A propos de l'approximation affine d'une fonction

problème ? Sans connaître explicitement l'expression de $f(x)$, peut-on construire point par point une courbe donnant l'allure de la représentation graphique de f ?

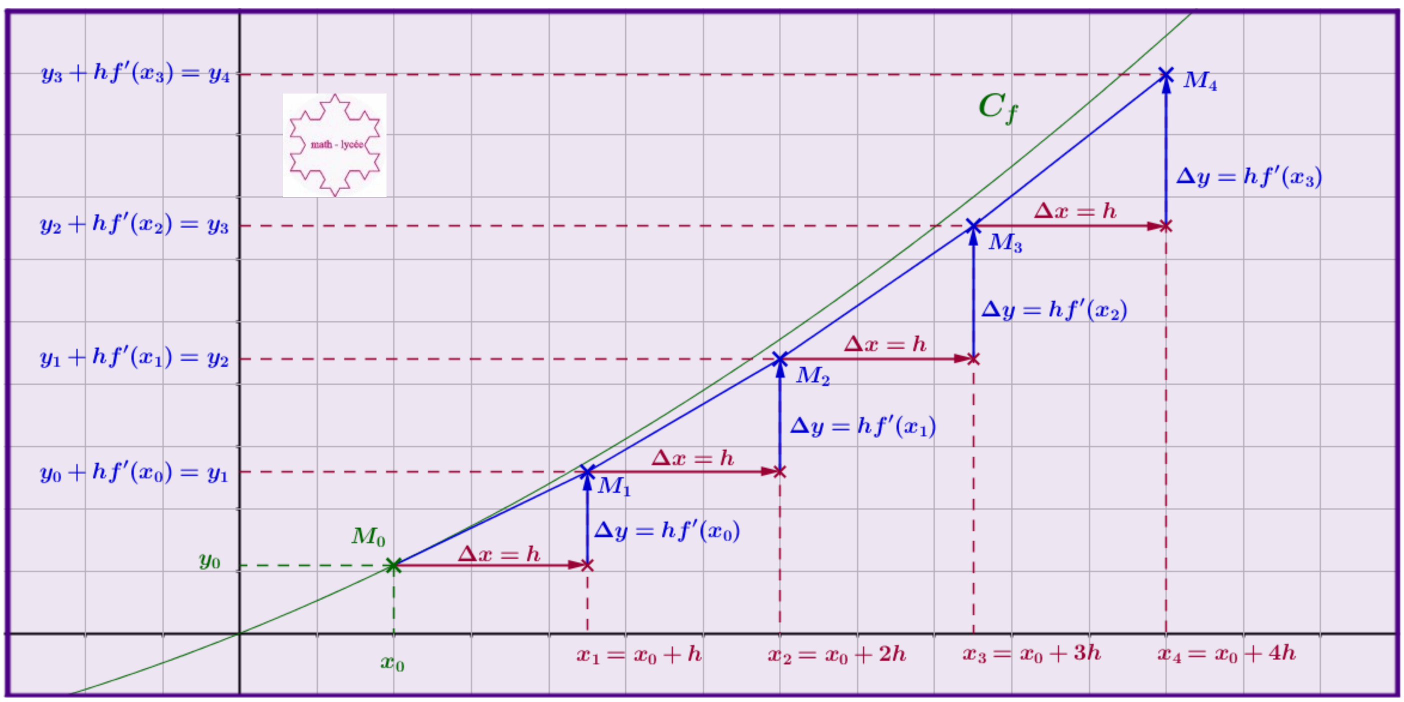
L'objet de ce TP est de montrer que c'est possible dans la situation suivante : on connaît la fonction dérivée de f et une valeur prise par f en un réel x_0 tel que f soit dérivable en x_0

L'outil : Lorsque f est dérivable en un réel a , on peut , pour un réel h voisin de 0 , calculer une valeur approchée de $f(a+h)$ en utilisant : $f(a+h) \simeq f(a) + h\,f'(a)$

L'idée pour construire la courbe : ne pouvant donner un tableau de valeurs exactes prises par f (puisque $f(x)$ n'est pas connu) , on construit un tableau de valeurs approchées de $f(x)$ et on trace la courbe contenant les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui ont pour niveau d'ordonnée la valeur approchée du niveau d'ordonnée $f(x)$ ($y \simeq f(x)$) . On commence évidemment par placer le seul point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ connu appartenant à la représentation graphique de f !

La méthode utilisée , dite méthode d'Euler

Cette méthode permet de **construire pas à pas un tableau de valeurs approchées de f(x)** à partir de la seule valeur connue $f(x_0)$. Pour réaliser cette méthode , on suppose que f est dérivable sur un intervalle I contenant tous les réels x pour lesquels on utilise le calcul de $f'(x)$.



Départ : on place $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 = f(x_0) \end{pmatrix}$ et on calcule la valeur du coefficient directeur $f'(x_0)$ de la droite T tangente à C_f en M_0 .
Avec $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ et un accroissement du niveau d'abscisse égal à : $\Delta x = h$ on obtient un accroissement du niveau d'ordonnée Δy tel que : $\Delta y = \Delta x \times f'(x_0) = h \times f'(x_0)$. On obtient ainsi le point M_1 de T d'abscisse $x_0 + h$ et d'ordonnée y_1 avec :
$y_1 = f(x_0) + h \times f'(x_0)$ soit : $M_1\begin{pmatrix} x_1 = x_0 + h \\ y_1 = y_0 + hf'(x_0) \end{pmatrix}$

En remplaçant a par x_0 dans l'outil $< f(a+h) \simeq f(a) + h\,f'(a) >$, on obtient : $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + h\,f'(x_0)$ soit : $f(x_0+h) \simeq y_1$

Autrement dit : pour $h \simeq 0$, le point M_1 est très voisin du point de C_f d'abcisse $x_0 + h$ et d'ordonnée $f(x_0 + h)$.

On décide alors que le segment $[M_0, M_1]$ situé sur la droite tangente T à C_f en M_0 est une représentation graphique voisine et donc $<$ approchée $>$ de la courbe C_f sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$.

On recommence le procédé : à partir du point $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, du coefficient directeur $f'(x_1)$ et d'un accroissement du niveau d'abscisse de $\Delta x = h$ on obtient un accroissement du niveau d'ordonnée Δy tel que $\Delta y = \Delta x \times f'(x_1) = h \times f'(x_1)$.

On obtient ainsi le point M_2 d'abscisse $x_1 + h$ et d'ordonnée $f(x_1) + h \times f'(x_1)$ soit $M_2 \begin{pmatrix} x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h \\ y_2 = y_1 + hf'(x_1) \end{pmatrix}$

Pour $h \simeq 0$, ce point M_2 est très voisin du point de C_f d'abcisse $x_0 + 2h$ et d'ordonnée $f(x_0 + 2h)$. En effet :

en remplaçant a par $x_0 + h$ dans l'outil $< f(a + h) \simeq f(a) + h\, f'(a) >$, on obtient : $f((x_0 + h) + h) \simeq f(x_0 + h) + h\, f'(x_0 + h)$

Or : $f((x_0 + h) + h) = f(x_0 + 2h)$, $f(x_0 + h) \simeq y_1$, $f'(x_0 + h) = f'(x_1)$. Donc : $f(x_0 + 2h) \simeq y_1 + h\, f'(x_1)$ soit : $f(x_0 + 2h) \simeq y_2$.

On décide alors que $[M_0, M_1] \cup [M_1, M_2]$ est une représentation approchée de la courbe C_f sur l'intervalle $[x_0, x_0 + 2h]$.

etc. . . . En répétant ce procédé , on construit ensuite de manière itérative et avec un pas de h (valeur de tous les Δx) , une suite de points M_3 , M_4 , M_5 , . . . , $M_{i-1} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix}$, $M_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ les coordonnées du point M_i étant calculées à partir de celles du point M_{i-1} avec $\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h \\ y_i = y_{i-1} + h\, f'(x_{i-1}) \end{cases}$. La réunion des segments $[M_0 M_1]$, $[M_1 M_2]$, $[M_2 M_3]$, . . . , $[M_{i-1} M_i]$, . . . permet d'approcher de façon satisfaisante la représentation graphique de f en prenant un pas h très proche de 0 .

Les ordonnées des points M_3 , M_4 , M_5 , . . . , M_i , M_{i+1} , . . . etc . . . , donnent alors des valeurs approchées des images $f(x_0 + 3h)$, $f(x_0 + 4h)$, $f(x_0 + 5h)$, . . . , $f(x_0 + (i - 1)h)$, $f(x_0 + ih)$, . . . etc . . . . Le calcul des coordonnées de ces points se programme facilement en utilisant les coordonnées du point M_0 situé sur C_f et le système suivant :

$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h = x_0 + ih \\ y_i = y_{i-1} + h\, f'(x_{i-1}) \end{cases}$ (qui permet de calculer les coordonnées de M_i avec celles du point précédent M_{i-1}) .

Première partie : l'importance du choix de la valeur du pas

Dans cette partie , f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$; $x_0 = 0$, on a donc : $f(x_0) = f(0) = 0$; $f'(x) = x - 1$. La figure de la page 3/8 donne la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0, 3]$

Question 1 : On utilise Geogebra Le but est de construire un tableau de valeurs approchées de $f(x)$ et un tracé approché de la courbe C_f en utilisant trois valeurs différentes de pas : un pas h de 0.5 , un pas k de 0.25 et un pas Δx de 0.1 .

Ouvrir Geogebra : → **Dans la partie Algèbre** : saisir $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ puis : $F(x) = Si[0 < x < 3, f(x)]$ puis : $f'(x) = x - 1$.

Afficher f en traits pointillés épaisseur 3 et couleur vert foncé . Afficher F en vert foncé trait plein épaisseur 3 . Ne pas afficher f' .

→ **Afficher le tableur** puis recopier ce qui est ci-contre .

1er tracé : en mauve avec un pas h de 0.5

2ème tracé : en rouge avec un pas k de 0.25

3ème tracé : en bleu avec un pas Δx de 0.1

Tableur

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x_0	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i = y_{i-1} + hf'(x_{i-1})$	point $E_i(x_i, y_i)$			Δx	i	$x_i = x_0 + i\Delta x$	$y_i = y_{i-1} + \Delta x * f'(x_{i-1})$	point $H_i(x_i, y_i)$
2	0	0	0	0	(0, 0)			0.1	0	0	0	(0, 0)
3	y_0	B2+1	$C$2+B3*$A$6	D2 + $A$6* f'(C2)	(C3,D3)							
4	0	2										
5	h	3										
6	0.5	4										
7		5										
8		6										
9												
10												
11	k	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i = y_{i-1} + kf'(x_{i-1})$	point $G_i(x_i, y_i)$							
12	0.25	0	0	0	(0, 0)							

1-1 Après avoir recopié vers le bas la colonne des indices i (avec un pas de 0.5 , $x_0 + ih$ vaut 3 pour un indice i égal à 6) , vérifier que l'on obtient le tableau ci dessous .

Sélectionner le bloc des points E_i puis propriétés :

→ ne pas afficher l'étiquette

→ style taille du point 3 ; style du point ×

Compléter le graphique en traçant en mauve et sans étiquette les segments $[E_2E_3]$, $[E_3E_4]$, ... , $[E_7E_8]$.

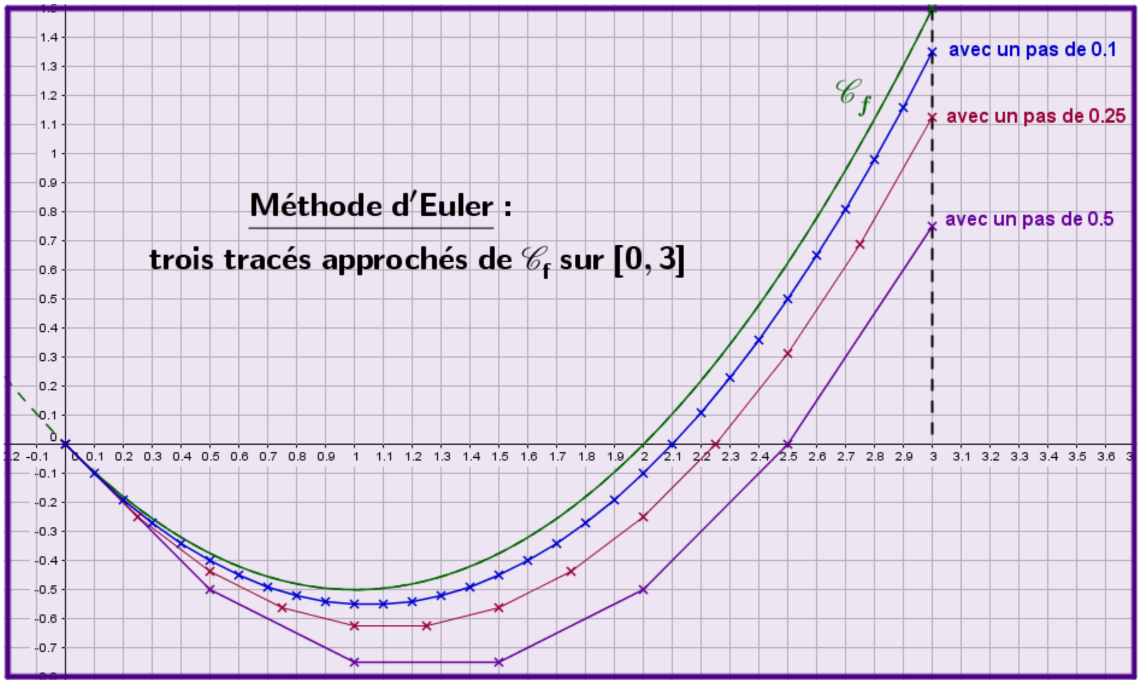
On obtient ainsi un premier tracé approché de la courbe C_f sur l'intervalle $[0, 3]$, en utilisant un pas h égal à 0.5 .

	A	B	C	D	E
1	x_0	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i = y_{i-1} + hf'(x_{i-1})$	point $E_i(x_i, y_i)$
2	0	0	0	0	(0, 0)
3	y0	1	0.5	-0.5	(0.5, -0.5)
4	0	2	1	-0.75	(1, -0.75)
5	h	3	1.5	-0.75	(1.5, -0.75)
6	0.5	4	2	-0.5	(2, -0.5)
7		5	2.5	0	(2.5, 0)
8		6	3	0.75	(3, 0.75)

1-2 S'inspirer de la question 1-1 pour obtenir , avec un deuxième pas k égal à 0.25 , un deuxième tracé approché en couleur rouge de la courbe C_f sur $[0, 3]$.

1-3 S'inspirer de la question 1-1 pour obtenir , avec un troisième pas Δx égal à 0.1 , un troisième tracé approché en couleur bleu de la courbe C_f sur $[0, 3]$.

1-4 En observant les trois tracés approchés de C_f que constate-ton ?



Plus le pas est petit et meilleur est le tracé approché de C_f

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	x_0	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i = y_{i-1} + hf'(x_{i-1})$	point $E_i(x_i, y_i)$	Δx	i	$x_i = x_0 + i\Delta x$	$y_i = y_{i-1} + \Delta x * f'(x_{i-1})$	point $H_i(x_i, y_i)$	i	$x_i =$	$y_i =$	point $H_i(x_i, y_i)$
2	0	0	0	0	(0, 0)	0.1	0	0	0	(0, 0)				
3	y0	1	0.5	-0.5	(0.5, -0.5)		1	0.1	-0.1	(0.1, -0.1)				
4	0	2	1	-0.75	(1, -0.75)		2	0.2	-0.19	(0.2, -0.19)				
5	h	3	1.5	-0.75	(1.5, -0.75)		3	0.3	-0.27	(0.3, -0.27)	21	2.1	0	(2.1, 0)
6	0.5	4	2	-0.5	(2, -0.5)		4	0.4	-0.34	(0.4, -0.34)	22	2.2	0.11	(2.2, 0.11)
7		5	2.5	0	(2.5, 0)		5	0.5	-0.4	(0.5, -0.4)	23	2.3	0.23	(2.3, 0.23)
8		6	3	0.75	(3, 0.75)		6	0.6	-0.45	(0.6, -0.45)	24	2.4	0.36	(2.4, 0.36)
9							7	0.7	-0.49	(0.7, -0.49)	25	2.5	0.5	(2.5, 0.5)
10	k	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i = y_{i-1} + kf'(x_{i-1})$	point $G_i(x_i, y_i)$		8	0.8	-0.52	(0.8, -0.52)	26	2.6	0.65	(2.6, 0.65)
11	0.25	0	0	0	(0, 0)		9	0.9	-0.54	(0.9, -0.54)	27	2.7	0.81	(2.7, 0.81)
12		1	0.25	-0.25	(0.25, -0.25)		10	1	-0.55	(1, -0.55)	28	2.8	0.98	(2.8, 0.98)
13		2	0.5	-0.44	(0.5, -0.44)		11	1.1	-0.55	(1.1, -0.55)	29	2.9	1.16	(2.9, 1.16)
14		3	0.75	-0.56	(0.75, -0.56)		12	1.2	-0.54	(1.2, -0.54)	30	3	1.35	(3, 1.35)
15		4	1	-0.63	(1, -0.63)		13	1.3	-0.52	(1.3, -0.52)				
16		5	1.25	-0.63	(1.25, -0.63)		14	1.4	-0.49	(1.4, -0.49)				
17		6	1.5	-0.56	(1.5, -0.56)		15	1.5	-0.45	(1.5, -0.45)				
18		7	1.75	-0.44	(1.75, -0.44)		16	1.6	-0.4	(1.6, -0.4)				
19		8	2	-0.25	(2, -0.25)		17	1.7	-0.34	(1.7, -0.34)				
20		9	2.25	0	(2.25, 0)		18	1.8	-0.27	(1.8, -0.27)				
21		10	2.5	0.31	(2.5, 0.31)		19	1.9	-0.19	(1.9, -0.19)				
22		11	2.75	0.69	(2.75, 0.69)		20	2	-0.1	(2, -0.1)				
23		12	3	1.13	(3, 1.13)		21	2.1	0	(2.1, 0)				

AlgoBox : Méthode d'EulerPour

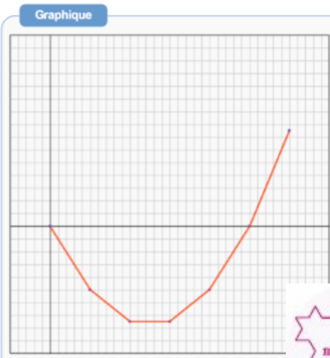
Méthode d'Euler pour obtenir sur un intervalle [a,b] un tracé approché de la représentation graphique Cf d'une fonction f en ne connaissant que la fonction dérivée de f et un point de Cf . L'algorithme ci-dessous utilise une boucle Pour....De...A

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x0 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y0 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE y0
  h PREND_LA_VALEUR (b-a)/n
  x1 PREND_LA_VALEUR a
  y1 PREND_LA_VALEUR y0
  TRACER_POINT (x1,y1)
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    y2 PREND_LA_VALEUR y1+h*F1(x1)
    x2 PREND_LA_VALEUR a+i*h
    AFFICHER "(x,y)=("
    AFFICHER x2
    AFFICHER ","
    AFFICHER y2
    AFFICHER ")"
    TRACER_POINT (x2,y2)
    TRACER_SEGMENT (x1,y1)->(x2,y2)
    x1 PREND_LA_VALEUR x2
    y1 PREND_LA_VALEUR y2
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=x-1
```

Graphique



Résultats

```
***Algorithme lancé***
Entrer n : 6
Entrer a : 0
Entrer b : 3
Entrer y0 : 0
(x,y)=(0.5,-0.5)
(x,y)=(1,-0.75)
(x,y)=(1.5,-0.75)
(x,y)=(2,-0.5)
(x,y)=(2.5,0)
(x,y)=(3,0.75)
***Algorithme terminé***
```

2-1 ce que fait l'algorithme : voir le titre ; la variable x_0 n'est pas utilisée .

2.2 Ouvrir Algobox et recopier cet algorithme . Pour **dessiner dans un repère** choisir **:**

pour X : min :-0.5 ; max : 3.5 ; grad : 0.1 ; pour Y : min : -1 ; max : 1.5 ; grad : 0.1

2-3 En choisisant bien la valeur de n , retrouver le tracé approché de C_f sur l'intervalle $[0,3]$ avec un deuxième pas égal à 0.25 :

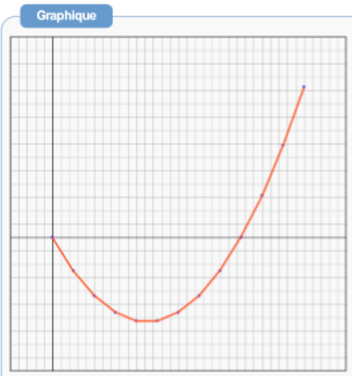
$\boxed{n=12}$ En effet : $b-a=3-0=3$ et le pas h vaut : $h=\dfrac{b-a}{n}$ donc : $\dfrac{b-a}{n}=0.25 \Leftrightarrow \dfrac{3}{n}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{n}{3}=4 \Leftrightarrow n=12$

2-4 tracé approché de C_f sur $[0,3]$ avec un troisième pas égal à 0.1 : $\boxed{n=30}$ $\dfrac{b-a}{n}=0.1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{n}=\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{n}{3}=10 \Leftrightarrow n=30$

2-5 En conservant les mêmes variables , écrire un **nouvel algorithme** en remplaçant la boucle **Pour** par un **Tant que .....Faire .**

Avec un pas de 0.25

Graphique

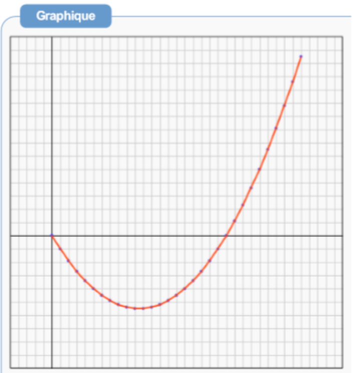


Résultats

```
***Algorithme lancé***
Entrer n : 12
Entrer a : 0
Entrer b : 3
Entrer y0 : 0
(x,y)=(0.25,-0.25)
(x,y)=(0.5,-0.4375)
(x,y)=(0.75,-0.5625)
(x,y)=(1,-0.625)
(x,y)=(1.25,-0.625)
(x,y)=(1.5,-0.5625)
(x,y)=(1.75,-0.4375)
(x,y)=(2,-0.25)
```

Avec un pas de 0.1

Graphique



Résultats

```
***Algorithme lancé***
Entrer n : 30
Entrer a : 0
Entrer b : 3
Entrer y0 : 0
(x,y)=(0.1,-0.1)
(x,y)=(0.2,-0.19)
(x,y)=(0.3,-0.27)
(x,y)=(0.4,-0.34)
(x,y)=(0.5,-0.4)
(x,y)=(0.6,-0.45)
(x,y)=(0.7,-0.49)
(x,y)=(0.8,-0.52)
```

Avec une boucle TantQue .... Faire

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y0 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE y0
  h PREND_LA_VALEUR (b-a)/n
  x1 PREND_LA_VALEUR a
  y1 PREND_LA_VALEUR y0
  TRACER_POINT (x1,y1)
  x2 PREND_LA_VALEUR x1+h
  TANT_QUE (x1<3) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    y2 PREND_LA_VALEUR y1+h*F1(x1)
    AFFICHER "(x,y)=("
    AFFICHER x2
    AFFICHER ","
    AFFICHER y2
    AFFICHER ")"
    TRACER_POINT (x2,y2)
    TRACER_SEGMENT (x1,y1)->(x2,y2)
    x1 PREND_LA_VALEUR x2
    y1 PREND_LA_VALEUR y2
    x2 PREND_LA_VALEUR x1+h
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=x-1
```

Deuxième partie : Deux fonctions du programme de TS

Question 1 : la fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(1)=0$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Au niveau 1^{ère}S , on connaît la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ mais **on ne connaît pas encore de fonction f qui a pour fonction dérivée** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La méthode d'Euler permet d'obtenir un tracé approché d'une telle fonction f en décidant :

f définie sur $]0,+\infty[$ et vérifiant : $f(1)=0$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Utiliser à nouveau Geogebra et **ouvrir** le programme MethodeEulerFigure1 puis **Sauvegarder sous** MethodeEulerFigure2 .

1-1 → Tableur : garder les titres du premier tableau et effacer toutes les données numériques et recopier ce qui est ci-dessous

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x_0	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i = y_{i-1} + hf'(x_{i-1})$	point$E_i(x_i, y_i)$	segment$[E_iE_{i+1}]$		k	i	$x_i = x_0 + ik$	$y_i = y_{i-1} + k * f'(x_{i-1})$	point$F_i(x_i, y_i)$	segment$[F_iF_{i+1}]$
2	1	0	1	0	(1, 0)			-0.1	0	1	0	(1, 0)	
3	y0	=B2+1	=$C$2+B3*$A$6	=D2+$A$6*f'(C2)	=(C3,D3)	=Segment[E2,E3]							
4	0												
5	h												
6	0.1												

→ Partie Algèbre : Changer $f'(x)=x-1$ en $f'(x)=\dfrac{1}{x}$; effacer $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ et $F(x)=Si[0<x<3, f(x)]$.

1-2 colonnes B à F du Tableur : Réaliser un tableau de valeurs permettant d'obtenir un tracé approché de C_f sur l'intervalle $[1,3]$ avec un pas h de 0.1 . Sélectionner le bloc des points E_i puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : mauve → style : taille du point 3 ; style du point × . Sélectionner le bloc des segments $[E_iE_{i+1}]$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : mauve

1-3 colonnes I à M du Tableur : Compléter la Ligne 3 du tableur de manière analogue aux définitions des cellules B3 à F3 . Réaliser ensuite un tableau de valeurs permettant d'obtenir sur l'intervalle $[0.1,1]$ un tracé approché de C_f avec un pas k négatif de -0.1 . Sélectionner le bloc des points F_i puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → style taille du point 3 ; style du point × → couleur : rouge . Sélectionner le bloc des segments $[F_iF_{i+1}]$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : rouge

La réunion des segments $[E_iE_{i+1}]$ et $[F_iF_{i+1}]$ permet d'obtenir un tracé approché de C_f sur l'intervalle $[0.1,3]$ avec un pas de 0.1 .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x_0	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i = y_{i-1} + hf'(x_{i-1})$	point$E_i(x_i, y_i)$	segment$[E_iE_{i+1}]$		k	i	$x_i = x_0 + ik$	$y_i = y_{i-1} + k * f'(x_{i-1})$	point$F_i(x_i, y_i)$	segment$[F_iF_{i+1}]$
2	1	0	1	0	(1, 0)			-0.1	0	1	0	(1, 0)	
3	y0	1	1.1	0.1	(1.1, 0.1)	0.14			1	0.9	-0.1	(0.9, -0.1)	0.14
4	0	2	1.2	0.19	(1.2, 0.19)	0.14			2	0.8	-0.21	(0.8, -0.21)	0.15
5	h	3	1.3	0.27	(1.3, 0.27)	0.13			3	0.7	-0.34	(0.7, -0.34)	0.16
6	0.1	4	1.4	0.35	(1.4, 0.35)	0.13			4	0.6	-0.48	(0.6, -0.48)	0.17
7		5	1.5	0.42	(1.5, 0.42)	0.12			5	0.5	-0.65	(0.5, -0.65)	0.19
8		6	1.6	0.49	(1.6, 0.49)	0.12			6	0.4	-0.85	(0.4, -0.85)	0.22
9		7	1.7	0.55	(1.7, 0.55)	0.12			7	0.3	-1.1	(0.3, -1.1)	0.27
10		8	1.8	0.61	(1.8, 0.61)	0.12			8	0.2	-1.43	(0.2, -1.43)	0.35
11		9	1.9	0.67	(1.9, 0.67)	0.11			9	0.1	-1.93	(0.1, -1.93)	0.51
12		10	2	0.72	(2, 0.72)	0.11							
13		11	2.1	0.77	(2.1, 0.77)	0.11							
14		12	2.2	0.82	(2.2, 0.82)	0.11							
15		13	2.3	0.86	(2.3, 0.86)	0.11							
16		14	2.4	0.91	(2.4, 0.91)	0.11							
17		15	2.5	0.95	(2.5, 0.95)	0.11							
18		16	2.6	0.99	(2.6, 0.99)	0.11							
19		17	2.7	1.03	(2.7, 1.03)	0.11							
20		18	2.8	1.06	(2.8, 1.06)	0.11							
21		19	2.9	1.1	(2.9, 1.1)	0.11							
22		20	3	1.13	(3, 1.13)	0.11							

1-4 Ecrire une équation de la droite T tangente à C_f en son point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 = f(x_0) \end{pmatrix}$ soit $M_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis compléter le graphique précédent en saisissant l'équation réduite de T . Sauvegarder votre travail .

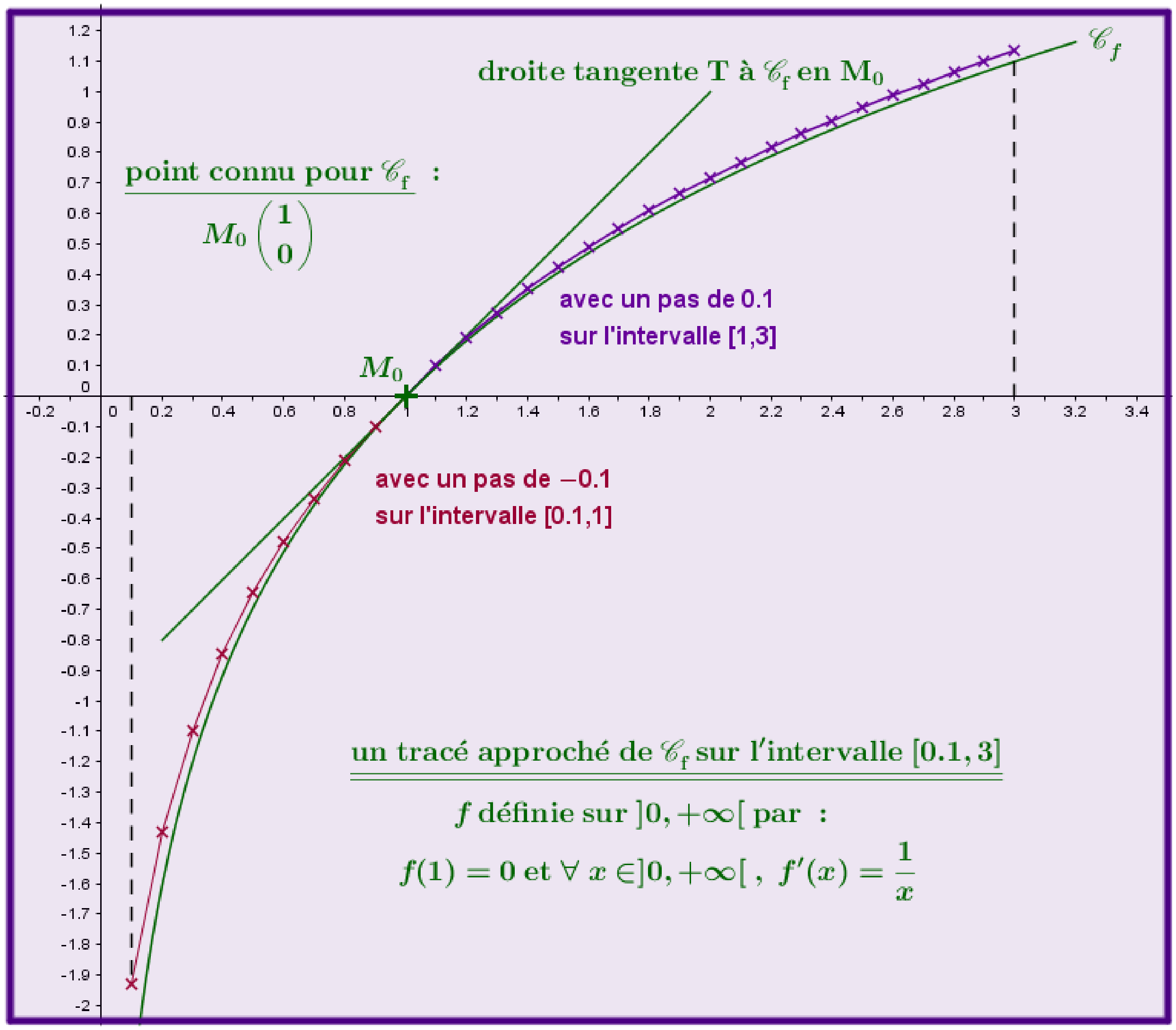
f étant dérivable en 1 , la courbe C_f admet en son point M_0 d'abscisse 1 une droite tangente T dont une équation est :

$y = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0]$ avec $x_0 = 1$ soit $T:\ y = f(1) + f'(1)[x - 1]$

Or : $f(1) = y_{M_0} = 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

Par conséquent : $T:\ y = f(1) + f'(1)[x - 1]$ devient $T:\ y = 0 + 1 \times (x - 1)$ soit $\boxed{T:\ y = x - 1}$

Pout tracer T on utilise les points $M_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$



quelques remarques :

Vous venez de donner une allure approchée très voisine de la courbe représentative de **la fonction logarithme népérien** .

Cette fonction , qui est étudiée en TS , est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et correspond à la touche $\boxed{ln}$ de la calculatrice .

L'image d'un réel x strictement positif par la fonction logarithme népérien est notée $ln(x)$ ou encore lnx . L'image du réel 1 par la fonction logarithme népérien vaut 0 soit : $\ln(1) = 0$.

La fonction logarithme népérien possède , par exemple , la particularité de transformer une multiplication en une addition car elle vérifie cette propriété fondamentale :

$$\boxed{\text{pour tous réels a et b strictement positifs : } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$$

Encore **une situation nouvelle** qui n'est pas au programme de $1^{ère}S$: **on connaît une valeur prise par f et une relation liant la fonction f avec sa fonction dérivée f'.**

La méthode d'Euler permet d'obtenir , par exemple , un tracé approché de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(0)=1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=f(x) \end{cases}$

2-1 : Que devient la relation : $y_i = y_{i-1} + h\,f'(x_{i-1})$ pour cette fonction f ? $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}) = y_{i-1} + hy_{i-1} = y_{i-1}(1+h)$

Que peut-on dire de la suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$? son premier terme est $y_0 = f(0) = 1$. Le mode récurrent définissant la suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est $\begin{cases} y_0 = f(0) = 1 \\ \forall i \in N, y_i = y_{i-1}(1+h) \end{cases}$. Ce mode récurrent permet d'affirmer : $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1+h$. Comme suite géométrique de premier terme égal à 1 , la suite géométrique $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la suite des puissances entières de sa raison $1+h$.

2-2 $\rightarrow$ Tableur : changer A2 en 0 et A4 en1 ; effacer toutes les données numériques et recopier ce qui est ci-dessous

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x_0	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i =$ ....?	point $E_i(x_i, y_i)$	segment$[E_iE_{i+1}]$		k	i	$x_i = x_0 + ik$	$y_i =$ ....?	point $F_i(x_i, y_i)$	segment$[F_iF_{i+1}]$
2	0	0	0	1	(0, 1)			-0.1	0	0	1	(0, 1)	
3	y_0												
4	1												
5	h												
6	0.1												

En utilisant **2-1** , compléter les cellules D1 et K1 : $y_i = y_{i-1}(1+h)$ et donc : $D3 = D2 * (1+\$A\$6)$; $K3 = K2 * (1+\$H\$2)$

2-3 <u>colonnes B à F</u> : tableau de valeurs permettant d'obtenir un tracé approché de C_f sur l'intervalle $[0,2]$ avec un pas h de 0.1 .

2-4 <u>colonnes I à M</u> : Compléter la Ligne 3 du tableur de manière analogue aux définitions des cellules B3 à F3 . Réaliser ensuite un tableau de valeurs permettant d'obtenir sur l'intervalle $[-2,0]$ un tracé approché de C_f avec un pas k négatif de -0.1 .

La réunion des segments $[E_iE_{i+1}]$ et $[F_iF_{i+1}]$ permet d'obtenir un tracé approché de C_f sur l'intervalle $[-2,2]$ avec un pas de 0.1.

Ce tracé approché de C_f apparaît comme le prolongement sur $[-2,2]$ de la représentation graphique de la suite des puissances du nombre 1.1 (1.1 : valeur de $1+h$ lorsque h vaut 0.1) .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x_0	i	$x_i = x_0 + ih$	$y_i = y_{i-1}(1+h)$	point $E_i(x_i, y_i)$	segment$[E_iE_{i+1}]$		k	i	$x_i = x_0 + ik$	$y_i = y_{i-1}(1+k)$	point $F_i(x_i, y_i)$	segment$[F_iF_{i+1}]$
2	0	0	0	1	(0, 1)			-0.1	0	0	1	(0, 1)	
3	y_0	1	0.1	1.1	(0.1, 1.1)	0.14			1	-0.1	0.9	(-0.1, 0.9)	0.14
4	1	2	0.2	1.21	(0.2, 1.21)	0.15			2	-0.2	0.81	(-0.2, 0.81)	0.13
5	h	3	0.3	1.33	(0.3, 1.33)	0.16			3	-0.3	0.73	(-0.3, 0.73)	0.13
6	0.1	4	0.4	1.46	(0.4, 1.46)	0.17			4	-0.4	0.66	(-0.4, 0.66)	0.12
7		5	0.5	1.61	(0.5, 1.61)	0.18			5	-0.5	0.59	(-0.5, 0.59)	0.12
8		6	0.6	1.77	(0.6, 1.77)	0.19			6	-0.6	0.53	(-0.6, 0.53)	0.12
9		7	0.7	1.95	(0.7, 1.95)	0.2			7	-0.7	0.48	(-0.7, 0.48)	0.11
10		8	0.8	2.14	(0.8, 2.14)	0.22			8	-0.8	0.43	(-0.8, 0.43)	0.11
11		9	0.9	2.36	(0.9, 2.36)	0.24			9	-0.9	0.39	(-0.9, 0.39)	0.11
12		10	1	2.59	(1, 2.59)	0.26			10	-1	0.35	(-1, 0.35)	0.11
13		11	1.1	2.85	(1.1, 2.85)	0.28			11	-1.1	0.31	(-1.1, 0.31)	0.11
14		12	1.2	3.14	(1.2, 3.14)	0.3			12	-1.2	0.28	(-1.2, 0.28)	0.1
15		13	1.3	3.45	(1.3, 3.45)	0.33			13	-1.3	0.25	(-1.3, 0.25)	0.1
16		14	1.4	3.8	(1.4, 3.8)	0.36			14	-1.4	0.23	(-1.4, 0.23)	0.1
17		15	1.5	4.18	(1.5, 4.18)	0.39			15	-1.5	0.21	(-1.5, 0.21)	0.1
18		16	1.6	4.59	(1.6, 4.59)	0.43			16	-1.6	0.19	(-1.6, 0.19)	0.1
19		17	1.7	5.05	(1.7, 5.05)	0.47			17	-1.7	0.17	(-1.7, 0.17)	0.1
20		18	1.8	5.56	(1.8, 5.56)	0.52			18	-1.8	0.15	(-1.8, 0.15)	0.1
21		19	1.9	6.12	(1.9, 6.12)	0.56			19	-1.9	0.14	(-1.9, 0.14)	0.1
22		20	2	6.73	(2, 6.73)	0.62			20	-2	0.12	(-2, 0.12)	0.1

1-4 Ecrire une équation de la droite T tangente à C_f en son point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 = f(x_0)\end{pmatrix}$ soit $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$

f étant dérivable en 0 , la courbe C_f admet en son point M_0 d'abscisse 0 une droite tangente T dont une équation est :

$y = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0]$ avec $x_0 = 0$

soit T : $y = f(0) + f'(0)[x - 0]$

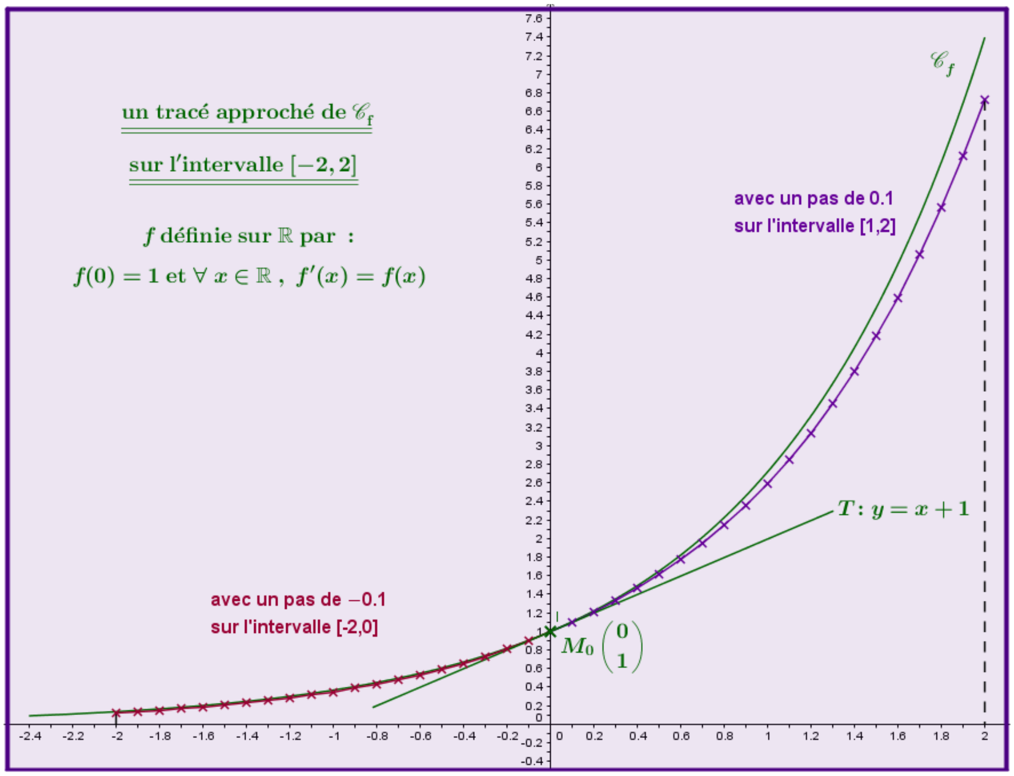
soit T : $y = f(0) + xf'(0)$

Or : $f(0) = y_{M_0} = 1$; $f'(0) = f(0) = 1$

Par conséquent :

T : $y = f(0) + xf'(0)$ devient

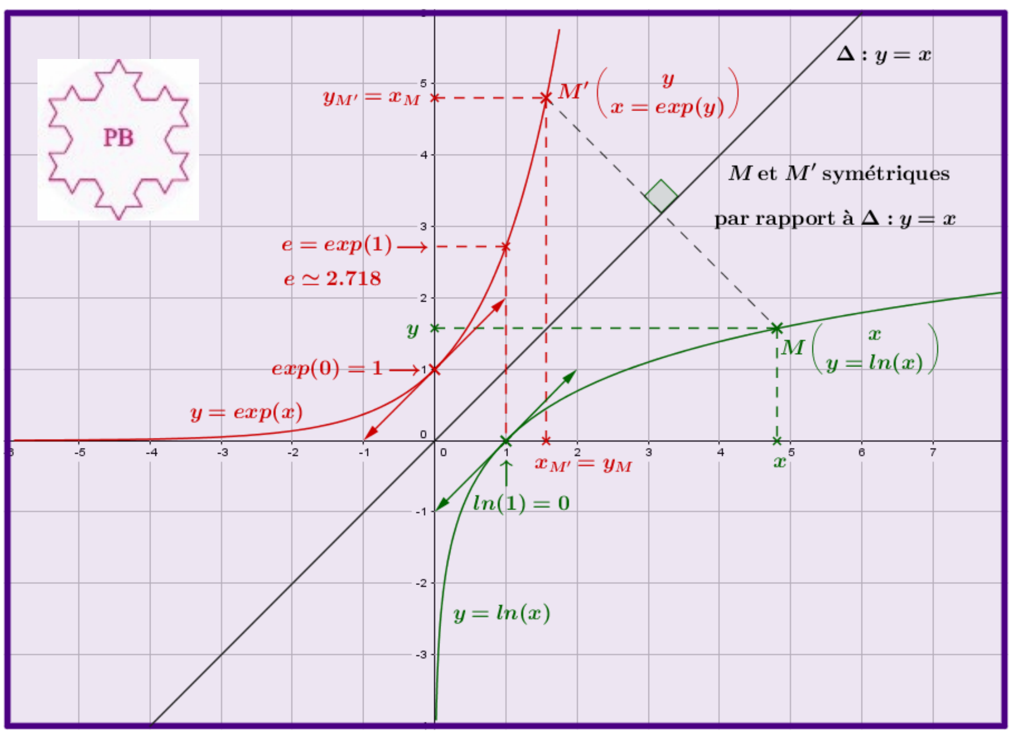
T : $y = 1 + x \times 1$ soit $\boxed{T : y = x + 1}$



quelques remarques :

Vous venez de donner un tracé approché de la courbe représentative de la fonction appelée **fonction exponentielle** .

Cette fonction , également étudiée en TS , est définie sur $\mathbb{R}$ et correspond à la touche e^x $\left(shift\ \boxed{ln}\right)$ de la calculatrice . L'image d'un réel quelconque x par la fonction exponentielle est notée $exp(x)$ ou e^x . L'image du réel 0 par la fonction exponentielle vaut 1 soit : $exp(0) = e^0 = 1$; l'image du réel 1 par la fonction exponentielle est notée e soit : $exp(1) = e^1 = e$; une valeur approchée du nombre e est : $e \simeq 2.718\,3$. Cette fonction exponentielle a la particularité de transformer une addition en une multiplication car elle vérifie cette propriété fondamentale : $\boxed{\text{pour tous réels a et b : } \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$



Observer l'allure des représentations graphiques des fonctions ln et exp sur l'écran de votre calculatrice en faisant tracer simultanément :

$y = lnx$; $y = e^x$; $y = x$

Dans un repère orthonormal ces deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$. Cela traduit la propriété suivante :

$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[\\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}, y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \exp(y)$

Pour exprimer cette propriété , on dit que les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre .