Produit Scalaire - énoncés feuille 2

Démontrer avec l'outil du produit scalaire

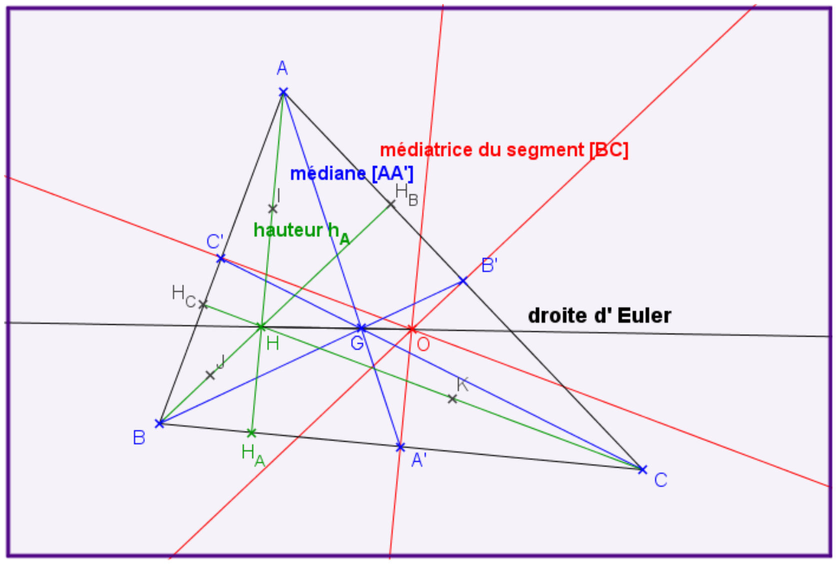
exercice 1 utiliser le produit scalaire pour justifier un alignement de trois points

La situation : ABC est un triangle non aplati et non équilatéral

→ O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle ABC)

→ G est le centre de gravité du triangle ABC (point de concours de ses trois médianes)

→ H est l'orthocentre du triangle ABC (point de concours de ses trois hauteurs)



La figure permet de conjecturer : O , G et H sont alignés

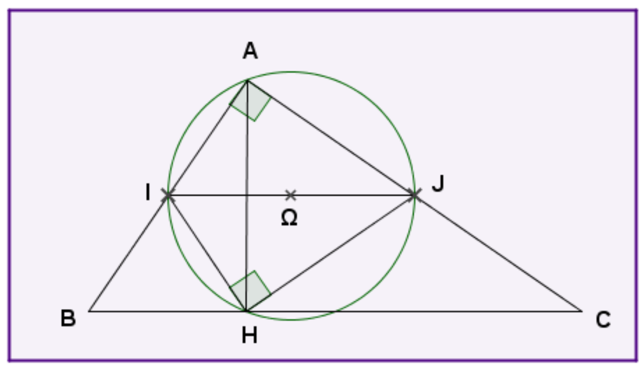
1) Justifier : si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ alors : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o}$

2) Prouver : $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

3) En déduire l'alignement des trois points O , G et H

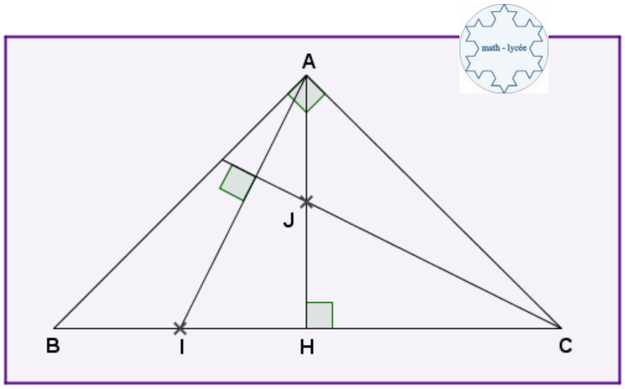
exercice 2 utiliser le produit scalaire pour justifier l'appartenance de quatre points à un même cercle

La situation : ABC est un triangle rectangle en A ; H est le pied de la hauteur issue de A ; I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et de [AC]



1) Justifier : $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -AH^2$

2) Justifier $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$. Que peut-on en déduire pour les quatre points A , I , J , H ?



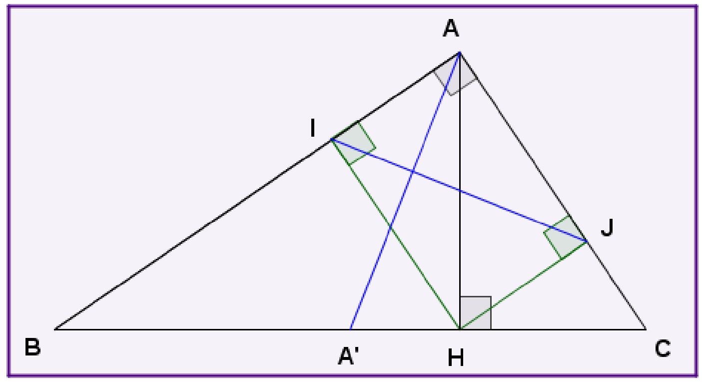
exercice 3 utiliser le produit scalaire pour justifier la perpendicularité de 2 droites

La situation : ABC est un triangle rectangle en A ; H est le pied de la hauteur issue de A ; I et J sont les milieux respectifs des segments [HB] et de [HC] .

1) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$ et de $\overrightarrow{AB}$.

2) Que vaut $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ}$? . Que peut-on en déduire ?

exercice 4 **utiliser le produit scalaire pour justifier la perpendicularité de 2 droites**



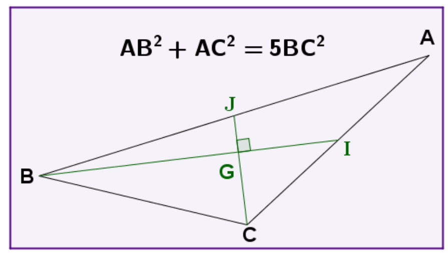
La situation : ABC est un triangle rectangle en A ; A' est le mileu de [BC] ; H est le pied de la hauteur issue de A ; I et J sont les projetés respectifs de H sur les segments [AB] et de [AC] .

1) Justifier $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$

2) En déduire la perpendicularité des droites (IJ) et (AA')

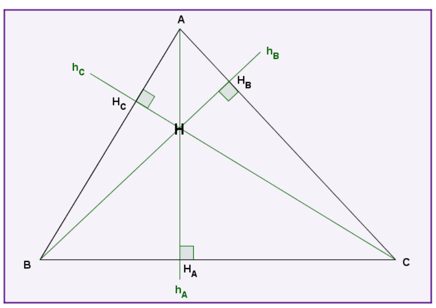
exercice 5 **utiliser le produit scalaire et un théorème de la médiane pour trouver une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que deux médianes d'un triangle soient perpendiculaires**

La situation : ABC est un triangle de centre de gravité noté G ; I et J sont les milieux respectifs des segments [AC] et [AB] .



Justifier que les médianes (GI) et (GJ) sont perpendiculaires ssi les sommets du triangle ABC vérifient : $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

exercice 6 **utiliser le produit scalaire pour justifier que les hauteurs d'un triangle sont concourrantes**



Préalable : Démontrer que pour tous points A , B , C , D du plan :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

La situation : ABC sont des points non alignés du plan et le triangle ABC n'est pas un triangle non rectangle . Les hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A , B et C sont notées h_A , h_B et h_C .

1) Justifier que les hauteurs h_A et h_B sont sécantes en un point H .

2) Déduire du préalable que H est situé sur la hauteur $h_{C.}$.

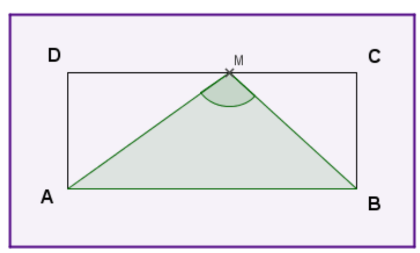
3) On note H_A , H_B et H_C les pieds respectifs des hauteurs h_A , h_B et h_C .
Justifier : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$ puis : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HH_A} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HH_B} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HH_C}$

exercice 7 ABCD est un rectangle tel que $AB = 15$ et $BC = 6$.
M est un point intérieur au segment [CD] tel que $CM = x$ avec x$\in]0, 15[$

1) Justifier : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = 36 - 15x$

2) En déduire : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 - 15x + 36$

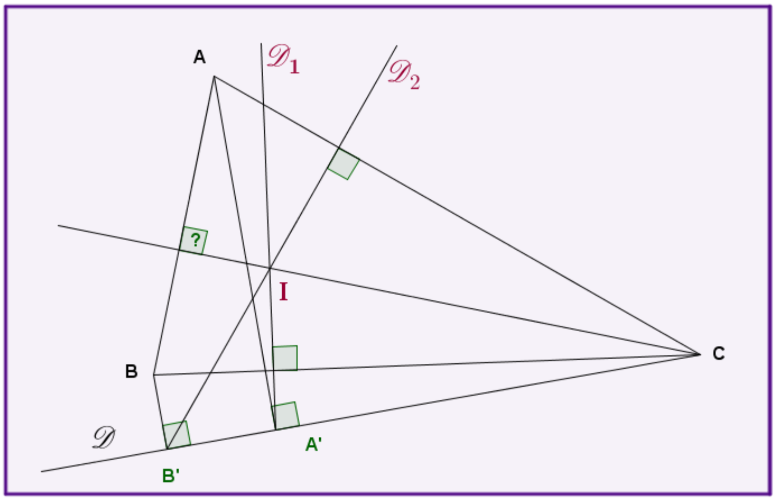
3) Le triangle MAB peut-il être rectangle ?



exercice 8 ABCD est un quadrilatère quelconque ; I est le milieu de [AC] et J est le milieu de [BD]

1) justifier : **1-1** $\left(AB^2 + CD^2\right) - \left(AD^2 + CB^2\right) = 2\left(\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$; **1-2** $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : **2-1** le quadrilatère ABCD ait ses diagonales perpendiculaires
2-2 le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme



exercice 9 utiliser le produit scalaire pour montrer que deux droites sont perpendiculaires

La situation : ABC est un triangle non aplati et $\mathcal{D}$ est une droite contenant seulement le sommet C de ce triangle .

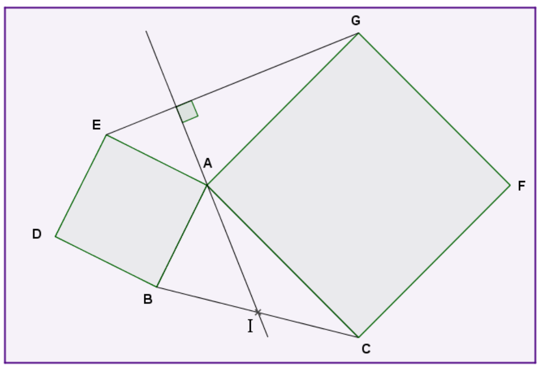
A' , B' sont les projetés orthogonaux respectifs des sommets A , B sur la droite $\mathcal{D}$. On considère les deux droites suivantes :

→ $\mathcal{D}_1$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A'

→ $\mathcal{D}_2$ est la perpendiculaire à (CA) passant par B'

On note I le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

Justifier : $(CI) \perp (AB)$ (Pour cela on pourra calculer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AB}$ en utilisant $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CI} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)$

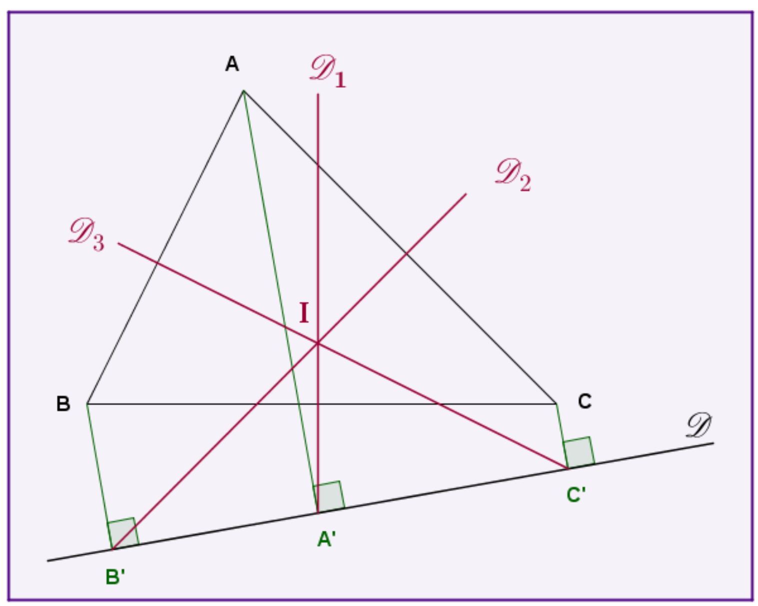


exercice 10 Objet : utiliser le produit scalaire et sa formule utilisant un cosinus pour justifier que deux droites sont perpendiculaires

La situation : ABDE et ACFG sont deux carrés construits extérieurement à un triangle ABC . I est le milieu de [BC]

Justifier que (AI) et (EG) sont perpendiculaires .

exercice 11 Objet : utiliser le produit scalaire pour justifier que trois droites sont concourantes



La situation : ABC est un triangle non aplati et $\mathcal{D}$ est une droite ne contenant aucun des trois sommets de ce triangle . A' , B' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs des trois sommets A , B , C sur la droite $\mathcal{D}$.

On considère les trois droites suivantes :

→ $\mathcal{D}_1$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A'

→ $\mathcal{D}_2$ est la perpendiculaire à (CA) passant par B'

→ $\mathcal{D}_3$ est la perpendiculaire à (AB) passant par C'

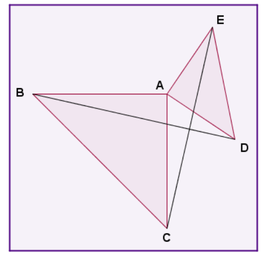
1) Justifier : le parallélisme des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ entraîne l'alignement des points A , B et C .

En déduire $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en un point que l'on notera I .

2) Justifier : $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB}$.

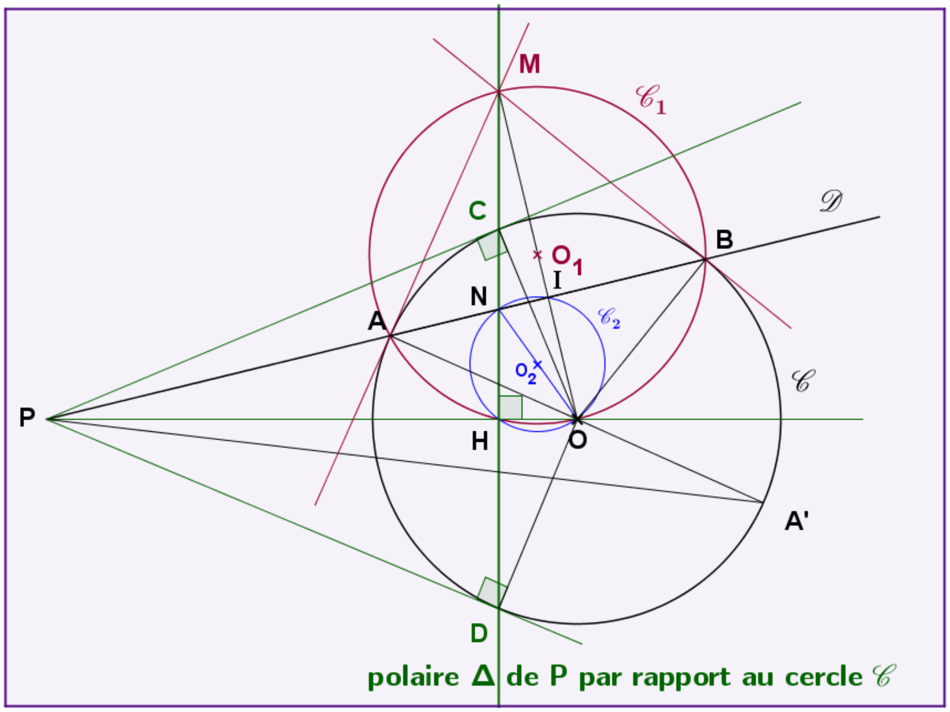
3) En déduire $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ puis $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ concourantes en I .

exercice 12 **Objet : utiliser le produit scalaire et sa formule utilisant un cosinus pour justifier que deux droites sont perpendiculaires**



La situation : ABC et ADE sont deux triangles rectangles isocèles .

Prouver que (BD) et (CE) sont perpendiculaires .



exercice 13

Objet : Puissance d'un point P par rapport à un cercle

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r , P est un point n'appartenant pas au cercle $\mathcal{C}$ et distinct de O ; $\mathcal{D}$ est une droite contenant P coupant $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B .

1) On note A' le point diamétralement opposé au point A sur le cercle C .

1-1 Justifier : $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'} = OP^2 - r^2$.

1-2 En déduire que le nombre $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ est indépendant du choix de la droite $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$ et donc de A et B

vocabulaire : ce réel $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ est appelé la **puissance du point P par rapport au cercle** $\mathcal{C}$; il est noté $p(P, \mathcal{C})$

1-3 Etudier le signe de $p(P, \mathcal{C})$ selon la position du point P par rapport au cercle C

2) On note M le point d'intersection des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ en A et en B et H le projeté orthogonal de M sur la droite (OP)

2-1 Justifier que les cinq points O, M , H , A , B sont situés sur un même cercle que l'on notera $\mathcal{C}_1$.

2-2 Démontrer que le nombre $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PH}$ est indépendant du choix de la droite sécante $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$. (s'inspirer de la question 1) puis en déduire que le point M est situé sur une droite Δ fixe .

vocabulaire : la droite fixe Δ est appelée la polaire du point P par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

2-3 Dans cette question on suppose P extérieur au cercle $\mathcal{C}$. On note C *et* D les points de contacts des droites tangentes au cercle $\mathcal{C}$ menées par P . Justifier que C et D sont situés sur Δ .

3) Dans cette question on suppose P extérieur au cercle $\mathcal{C}$. On note N le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ .

3-1 Justifier : $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PI}$ avec I milieu de [AB]

3-2 En déduire : $\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IN} = IA^2 = IB^2$

3-3 En déduire : $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{NP}$ puis en déduire : $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{NB} = -\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{NA}$

3-4 En utilisant la question 2-2 , justifier : $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{ON} = r^2$

vocabulaire : les points O et N sont dits conjugués harmoniquement par rapport au cercle $\mathcal{C}$ de rayon r et la droite Δ passant par C et D et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ est appelée la polaire du point P par rapport au cercle $\mathcal{C}$.