Calculs de limites et opérations sur les fonctions

f et g sont deux fonctions numériques d'une variable réelle .

Dans un voisinage donné ($x \longrightarrow +\infty$ ou $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow x_0$) , la connaissance des comportements de f(x) et de g(x) permet en général de déduire le comportement des réels indiqués dans le tableau suivant :

le réel associé à f(x) ou bien à f(x) et à g(x) :	$f(x)+g(x)$	$a \times f(x)$	$f(x) \times g(x)$	$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
qui est l'image du réel x par la fonction notée :	$f+g$	af	fg	$\frac{1}{f}$	$\frac{f}{g}$

tableau 1 : somme de deux fonctions

on connaît lim f	on connaît lim g	on déduit lim f + g	exemples d'utilisation quand la déduction est possible
m (réel)	l (réel)	$m+l$	$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2} 3x = 3(2) = 6 \end{cases}$ donc : $\lim\limits_{x\to 2} x^2+3x = 4+6 = 10$
m (réel)	$+\infty$	$+\infty$	$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x} = 2+0 = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}+x^2 = +\infty$
m (réel)	$-\infty$	$-\infty$	$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty (\text{car } 2>0) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1+\frac{1}{x} = -\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty \end{cases}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4+x^2+1 = +\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+4 = -\infty \end{cases}$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5+x^3+4 = -\infty$
$+\infty$	$-\infty$	???	**théorème "somme " inapplicable**

tableau 2 : produit af avec a réel non nul

on connaît lim f	on déduit lim af avec $a>0$	on déduit lim af avec $a<0$	exemples d'utilisation
m (réel)	am	am	$\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3} 4x^2 = 4\times 9 = 36 \\ \lim\limits_{x\to 3} -5x^2 = -5\times 9 = -45 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty \text{ car : } 3>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty \text{ car : } -2<0 \end{cases}$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^5 = -\infty \text{ car : } 4>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -3x^5 = +\infty \text{ car : } -3<0 \end{cases}$

tableau 3 : inverse d'une fonction

on connaît lim f	on déduit lim $\frac{1}{f}$	exemples d'utilisation
m (réel non nul)	$\frac{1}{m}$	$\lim\limits_{x\to 1} x^2+4x+1 = 1^2+(4\times 1)+1 = 6$ donc : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2+4x+1} = \frac{1}{6}$
$+\infty$ ou $-\infty$	0	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
0 penser à $\frac{1}{X}$ et à $\frac{1}{X^2}$ aux voisinages de 0 en posant $X = f(x)$	$+\infty$ ssi $f(x)>0$ $-\infty$ ssi $f(x)<0$	• $\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 0$ et $x-2$ s'annule en 2 en changeant de signe ; d'où : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \frac{1}{x-2} = +\infty \text{ car } : x>2 \Rightarrow x-2>0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ car } : x<2 \Rightarrow x-2<0 \end{cases}$ • $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} (x-2)^2 = 0$ et $(x-2)^2$ s'annule en 2 sans changer de signe . D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ car $x \neq 2 \Rightarrow (x-2)^2 > 0$

lim f	lim g	on déduit lim$f \times g$	exemples d'utilisation quand la déduction est possible
m (réel)	l (réel)	ml	$\lim\limits_{x\to 4} x=4$; $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=\sqrt{4}=2$ donc $\lim\limits_{x\to 4} x\sqrt{x}=4\times 2=8$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\sqrt{x}=+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x+3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3(x+3)=+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^4=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x+3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4(x+3)=-\infty$
$+\infty$	l réel non nul	$+\infty$ *ssi* $l>0$ $-\infty$ *ssi* $l<0$	$\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2+\dfrac{1}{x}=2\end{cases}$ et $2>0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} -3+\dfrac{1}{x}=-3\end{cases}$ et $-3<0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(-3+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$
$-\infty$	l réel non nul	$-\infty$ *ssi* $l>0$ $+\infty$ *ssi* $l<0$	$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} 2x+3=3\end{cases}$ et $3>0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x}\times(2x+3)=-\infty$ $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} 2x-5=-5\end{cases}$ et $-5<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x}\times(2x-5)=+\infty$
$+\infty$ **ou** $-\infty$	0	???	**théorème "produit " inapplicable**

tableau 5 : quotient de deux fonctions

lim f	lim g	on déduitlim $\dfrac{f}{g}$	exemples d'utilisation quand la déduction est possible
m (réel)	l (réel non nul)	$\dfrac{m}{l}$	$\lim\limits_{x\to 4} x^2=16$; $\lim\limits_{x\to 4} x+5=9$ donc $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2}{x+5}=\dfrac{16}{9}$
m (réel)	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$\lim\limits_{x\to +\infty} 2+\dfrac{1}{x}=2$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}=0$
m (réel non nul)	0	$+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\lim\limits_{x\to 0} x^2+3=3$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ on a : $x>0\Rightarrow\dfrac{x^2+3}{x}>0$ et $x<0\Rightarrow\dfrac{x^2+3}{x}<0$ donc: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{x^2+3}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{x^2+3}{x}=-\infty$
$+\infty$ *ou* $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 2+\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\sqrt{x}=0$ $x>0\Rightarrow\dfrac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}>0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}=+\infty$
$+\infty$ *ou* $-\infty$	l (réel non nul)	$+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 2+\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 5+x=5$ $x>0\Rightarrow\dfrac{2+\frac{1}{x}}{5+x}>0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{5+x}=+\infty$
$+\infty$ **ou** $-\infty$	$+\infty$ **ou** $-\infty$	???	**théorème "quotient " inapplicable**
0	0	???	**théorème "quotient " inapplicable**

remarque : $\dfrac{f}{g}=f\times\dfrac{1}{g}$. Souvent il est plus commode d'utiliser l'écriture produit $f\times\dfrac{1}{g}$ et les tableaux 3 et 4 pour étudier la limite du quotient $\dfrac{f}{g}$: ainsi pour éviter l'étude du signe de $F(x)=\dfrac{x^3-5x}{x-2}$ lors du calcul de $\lim\limits_{2^+} F$ on peut écrire $F(x)=(x^3-5x)\times\dfrac{1}{x-2}$ puis **1)** préciser $\lim\limits_{x\to 2} x^3-5x$(on trouve une limite réelle non nulle)
2) préciser $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}\dfrac{1}{x-2}$ ($+\infty$) **3)** déduire $\lim\limits_{2^+} F(x)$ avec le théorème " Produit " en tenant compte du signe de $\lim\limits_{x\to 2} x^3-5x$